Concursul Interjudețean de Matematică"Bogdan Stan"
Ediția a II-a
Colegiul National "Radu Greceanu", Slatina, OLT 27-28 ianuarie 2012

Subiecte clasa a XI-a

Problema 1

Considerăm matricele $a, b \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^k, B^k \neq \lambda I_2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall k \geq 1$. Aratati ca daca există $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^m = B^n$, atunci $AB = BA$. Reciproca este adevărată?

Cosmin Nitu, Bucuresti

Problema 2

Fie sirul $(x_n)_{n\in N}$ cu elemente strict positive si marginit care indeplineste relatia $x_{n+3} = \sqrt[5]{3x_n - 2}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Demonstrati ca sirul $(x_n)_{n\in N}$ este convergent.

Cristinel Mortici,Targoviste

Problema 3

Calculati :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \cdot \left[\log_5 \left(\sqrt[5^n]{2} + \sqrt[5^n]{3} + \ldots \sqrt[5^n]{5^n + 1} \right) \right],$$ unde $[x]$ = partea intreaga a numarului real x.

Taclit Daniela Nadia, Slatina

Problema 4

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(Z)$ o matrice inversabila pentru care inversa $A^{-1} \in M_2(Z)$. Notam $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, $n \geq 1$. Sa se arate ca $(a_n, b_n) = (a_n, c_n) = (d_n, b_n) = (c_n, d_n) = 1$, unde (x,y) reprezinta cel mai mare divisor comun al numerelor x si y.

Vasile Pop, Cluj

Nota. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare problema corect rezolvata primeste 7 puncte. Timp de lucru trei ore de la primirea subiectelor.