Problema 1

Considerăm cubul *ABCDA'B'C'D'* de latură *l=1*. Determinați minimul sumei $MA^2+2MB^2+3MC^2+4MD^2$, unde *M* este un punct variabil situat pe fața *A'B'C'D'*.

Cosmin Nitu,Bucuresti

Soluție.

Fie $x=d(M,ADD'A')$, $y=d(M,BCC'B')$, $x,y\in[0,1]$.

Avem:

$$MA^2+2MB^2+3MC^2+4MD^2=x^2+y^2+1+2[(1-x)^2+y^2+1]+$$

$$+3[(1-x)^2+(1-y)^2+1]+4[x^2+(1-y)^2+1]$$ ………………2p

Aşadar, trebuie determinat minimul sumei:

$$10x^2+10y^2-10x-14y+12,\ \text{unde}\ x,y\in[0,1]$$ ……………..2p

care se scrie

$$10\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+10\left(y-0,7\right)^2+4,6$$ ……………………….2p

Deci minimul este 4,6 şi se obtine pentru $x=\frac{1}{2}, y=0,7$ ……………1p

Problema 2

In patratelele unei table de *9x9* se scriu divizori ai numarului n^m,unde *n* este produsul a trei numere prime distinct, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 4$.

a)Aratati ca pe fiecare linie si fiecare coloana avem doi divizori care au catul patratul unui numar rational.

b)Aratati ca printer divizorii aflati la intersectia a *4* linii si *7* coloane avem doi divizori care au catul cubul unui numar rational.

Ion Gusatu, C.N.Radu Greceanu, Slatina

Solutie:

a) $n = p_1^m p_2^m p_3^m$. Divizori lui n au forma $p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3}$……………………1p

Avem 8 triplete (a_1,a_2,a_3) cu $a_i \in \{2k, 2k+1\}$ $i=\overline{1,3}$……………………1p

Cum pe fiecare linie (coloana) avem 9 divizori vor exista doi divizori $d_1=p_1^{a_1} p_2^{a_2} p_3^{a_3}$ si $d_2=p_1^{b_1} p_2^{b_2} p_3^{b_3}$ a.i. $\{a_1,b_1\}$,$\{a_2,b_2\}$,$\{a_3,b_3\}$ au aceasi paritate……………………………………………………………1p

$\Rightarrow d_1:d_2=p_1^{a_1-b_1} p_2^{a_2-b_2} p_3^{a_3-b_3}$ cu a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3 numere pare

$\Rightarrow d_1:d_2$ este patratul unui nr rational…………………………………….1p

b) Avem 27 triplete (a_1, a_2, a_3) cu $a_i \in \{3k, 3k+1, 3k+2\}$, $i=\overline{1,3}$……….......1p

Cum la intersectia a patru lini si sapte coloane avem 28 de divizori vor exista doi divizori d_1, d_2 a.i. $\{a_1, b_1\}$, $\{a_2,b_2\}$ si $\{a_3, b_3\}$ dau rest la impartirea cu 3…………………………………………………….1p

$d_1:d_2=p_1^{a_1-b_1} p_2^{a_2-b_2} p_3^{a_3-b_3}$ cu $\{a_1,b_1\}$,$\{a_2,b_2\}$,$\{a_3,b_3\}$ divizibile cu 3

Deci vom avea $d_1:d_2$ cubul unui numar rational………………………1p

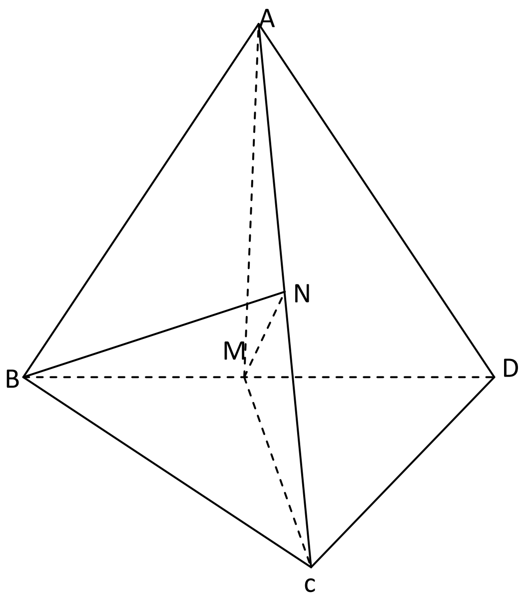
Problema 3

Fie tetraedul *ABCD* cu *[AB]≡[AD]*, *[BC]≡[CD]* si *M* mijlocul lui *[BD]*. Daca bisectoarele unghiurilor *ABC* si *AMC* se intersecteaza in *N∈(AC)* atunci:

a) Aratati ca distanta *(AC, BD)=MN*

b) Daca in plus, avem *BN·AC=CM·BD*, aratati ca *[AC]≡[BD]*

G.M.



Solutie

ΔABD isoscel, [A,M] Mediana ⇒ [AM] inaltime⇒ BD⊥AM (1)

ΔBCD isoscel, [CM]-mediana⇒[CM] inaltime⇒ BD⊥CM (2)…………….1p

Din 1 si 2⇒BD⊥(AM,CM)⇒BD⊥(AMC), MN⊂(AMC) ⇒ BD⊥MN (3) ………..1p

[BN] bisectoare ∢ABC⇒$\frac{AN}{NC} = \frac{AB}{BC}$,

[MN] bisectoare ∢AMC⇒$\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MC}$⇒

$\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AM^2}{MC^2} = \frac{AB^2-AM^2}{BC^2-MC^2} = \frac{BM^2}{BM^2}$………………………………1p

$AB = BC$ si AM=MC, MN este bisectoarea ∢AMC ⇒

[MN]⊥AC (4)……………………………………………………..1p

$Din\ (3) si\ (4)$ ⇒MN este perpendicular comuna a dreptelor AC si BD ⇒d(AC,BD)=MN………………………………1p

b)BN·AC=CM·BD ⇒$\frac{BN}{CM} = \frac{BD}{AC} \Rightarrow \frac{BN}{CM} = \frac{BM}{CN}$……………………..1p

⇒$\frac{BN^2}{CN^2} = \frac{BM^2}{CN^2} = \frac{BN^2-MB^2}{CM^2-CN^2} = \frac{MN^2}{MN^2} = 1$⇒BM=CN⇒BD=AC….1p

Problema 4

a) Sa se determine numerele intregi *m* si *n* pentru care:

$$9m^2 - n^2 + 4n = 15$$

Virgil Serban, Bucuresti

b)Demonstrati ca :

$$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{2} \le \sqrt{2a-1} + \sqrt{2b-1} \ \ \forall\, a, b > 1$$

Dumitru Robert ,elev C.N.Radu Greceanu, Slatina

a) Rezolvare:

Relatia este echivalenta cu:

(3m-n+2)(3m+n-2) = 11……………………………………………………..2p

Se obtin solutiile : {(2;7);(2;-3);(-2;-3);(-2;7)}………………………….2p

b) Relatia este echivalenta cu:

$\sqrt{(2a-2)+1} + \sqrt{(2b-2)+1} \ge \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{2}$………1p

Stim ca $M_p > M_a$: $\sqrt{x^2+y^2} \ge \frac{x+y}{\sqrt{2}}$

$$\sqrt{2a-2+1} \ge \frac{\sqrt{2a-2}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\sqrt{2b-2+1} \ge \frac{\sqrt{2b-2}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$……………………………………………1p

Prin adunare optinem:

$\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{2} \le \sqrt{2a-1} + \sqrt{2b-1}$……………1p