Problema 1

Aratati ca ecuatia $x^2 + 12y^3 = z^4$ are o infinitate de solutii $(x, y, z) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

Cosmin Nițu, Bucureşti

Solutie:

E suficient sa determinam o singura solutie nenula……………..2p

Apoi, prin inmultire cu k^{12}, $k \neq 0$, obtinem noi solutii. Alegem y minim, adica $y = 1$……………………………………………………….3p

. Observam ca o solutie nenula este $(2,1,2)$……………………2p

Problema 2

În patrulaterul convex $ABCD$ notăm $AC \cap BD = \{O\}$. Demonstrați că $ABCD$ este paralelogram dacă si numai dacă $A_{AOD} = A_{BOC}$ şi $A_{AOB} = A_{COD}$, unde cu A_{AOD} am notat aria triunghiului AOD.

Cosmin Nitu,Bucuresti

"=>" Dacă ABCD e paralelogram, atunci diagonalele se injumătățesc, iar triunghiurile AOB, BOC, COD si DOA au ariile egale. ……………………………………1p

Deci se verifică faptul că $A_{AOD} = A_{BOC}$ şi $A_{AOB} = A_{COD}$ **……………………….1p**

"<=" Presupunem că $A_{AOD} = A_{BOC}$ si $A_{AOB} = A_{COD}$.

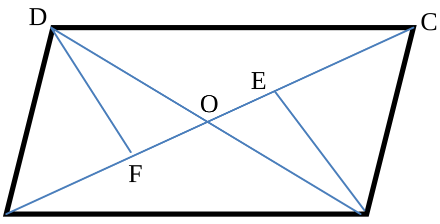
Avem că $A_{ACD} = A_{AOD} + A_{DOC} = A_{BOC} + A_{DOC} = A_{BCD}$ **………………………..1p**

Fie $BE, DF \perp AC$.

$$A_{ACD} = A_{BCD} \Rightarrow \frac{AC \cdot DF}{2} = \frac{AC \cdot BE}{2} \Rightarrow DF = BE$$

$$A_{AOD} = A_{BOC} \Rightarrow \frac{AO \cdot DF}{2} = \frac{OC \cdot BE}{2} \Rightarrow AO = OC \quad (1)$$ ……………………..2p

Analog, se arată că $BO = OD$ (2). Din relațiile (1) si (2), diagonalele au acelaşi mijloc, deci ABCD este paralelogram……………………………………………2p



Problema 3

Fie *P* un punct in interiorul unui triunghi *ABC* . Construim prin *P* o paralela la *BC* care intersecteaza laturile (*AB*) si (*AC*) in *M* respective *N*. Prin *M* si *N* ducem paralele la *AP* ce intersecteaza (*BC*) in *E* si respectiv *F*.Sa se arate ca daca *BE* + *CF* reprezinta o treime din *BC* atunci dreapta *MN* trece prin centrul de greutate al triunghiului *ABC*.

Ion Gusatu,C.N. Radu Greceanu ,Slatina

Notam $\frac{PD}{AD} = x$, AP $\cap BC = \{D\}$ ME||AD⇒$\Delta BEM \sim \Delta BDA \Rightarrow \frac{BE}{BD} = \frac{ME}{AD} = \frac{PD}{AD} = x$ 1.

(ME=PD deoarece MEDP paralelogram)…………………………………..2p

NF||AD⇒$\Delta CNF \sim \Delta CAD \Rightarrow \frac{CF}{CD} = \frac{NF}{AD} = \frac{PD}{AD} = x$ 2.

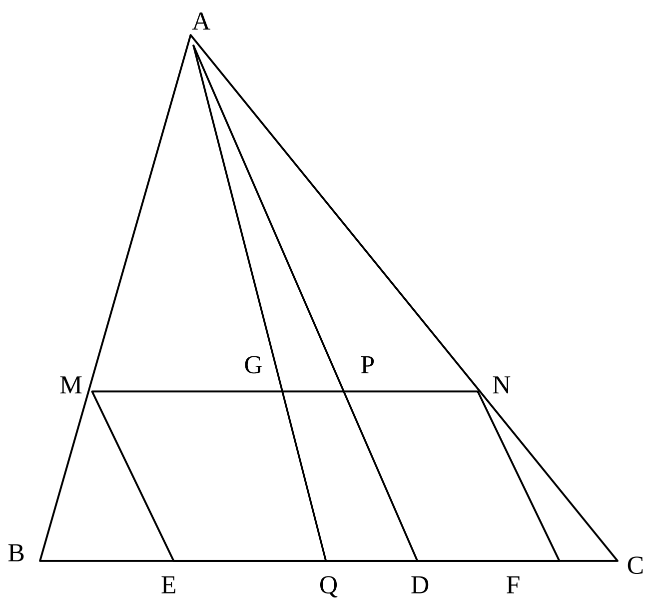
(Nf=PD deoarece NFDP parallelogram)………………………………..2p

Din 1 si 2⇒$\frac{BE}{BD} = \frac{CF}{CD} = \frac{CE+CF}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow$

x=$\frac{1}{3}$………………………………………………..1p

Construim [AQ]- mediana si notam AQ $\cap MN = \{G\}$

GP||QD⇒$\frac{GQ}{AQ} = \frac{PD}{AD} = x = \frac{1}{3}$⇒ G este central de greutate al ΔABC……………2p



Problema 4

Determinati numerele prime *x*,*y*,*z* astfel incat:

7(x+y+z+xyz)=40(1+yz)

G.M. Ion Neata

Solutie:

$\frac{x+y+z+xyz}{1+yz} = \frac{x(1+yz)+y+z}{1+yz} = x + \frac{y+z}{1+yz}$ …………………………1p

Din (y-1)(z-1)>0 rezulta 1+yz>y+z si de aici $0 < \frac{y+z}{1+yz} < 1$……….1p

Ecuatia data se scrie : $x+\frac{y+z}{1+yz} = 5 + \frac{5}{7}$ rezulta x=5 si $\frac{y+z}{1+yz} = \frac{5}{7}$ …2p

de unde se obtine $y=\frac{7z-5}{5z-7} \in \mathbb{N}$.

Obtinem z=2 si z=3, respectiv y=3 si y=2. ………………………3p