Problema 1

Sa se determine numarul minim de unghiuri formate in jurul unui punct care au masurile in grade numere naturale impare consecutive. Puteti preciza numarul maxim? Justificati raspunsul.

Marian Oporanu ,C.N. Radu Greceanu, Slatina

Rezolvare:

Nu putem avea un numar impar de unghiuri deoarece suma lor ar fi un numar impar, iar 360 este numar par. Doua unghiuri nu putem avea pentru ca un unghi are masura mai mare sau egala cu 0 si mai mica sau egala cu 180 grade. Putem avea 4 unghiuri de masuri 87, 89, 91, 93. Numarul minim este 4…………………….3p

Sa consideram ca avem in jurul punctului n unghiuri care indeplinesc conditia ceruta adica au masurile de: 2k+1, 2k+3, 2k+5, … ,2k+2n-1, $k \in N$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Fiind unghiuri in jurul unui punct au suma masurilor de 360 grade. Avem deci:

2k+1+2k+3+2k+5+ … + 2k+2n-1=360 grade

$\Rightarrow \underbrace{2K + 2k + 2k + \cdots + 2k}_{n\ ori} + 1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = 360\ grade \Rightarrow$ 2kn+ n^2=360 grade $\Rightarrow$ n(2k+n)=360 grade ………………………………………….2p

360 se descompune in factori primi astfel $360=2^3\cdot 3^2\cdot 5$

Rezulta ca $n(2k+n)=2^3\cdot 3^2\cdot 5$

n nu poate fi numar impar pentru ca atunci am avea produsul a doua numere impare = nr impar cea ce nu se poate. n<2k+n Deci 2k+n este numar par. Cel mai mare numar natural par posibil este n=18………………………………………1p

$n(2k+n)=18\cdot 20 \Rightarrow 2k+18=20 \Rightarrow 2k=2 \Rightarrow k=1$

Obtinem 18 unghiuri de masuri: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15,17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37 grade……………………………………………………………….1p

Problema 2

Pentru orice numar natural *a* notam cu *s(a)* suma cifrelor lui *a*. Aratati ca daca *n* este un numar natural de *2012* cifre care e divizibil cu *3* dar nu este divizibil cu *9* atunci *s(s(s(n)))* este o cifra ce **nu** reprezinta un patrat perfect.

Ion Tecu ,C.N. Radu Greceanu, Slatina

Solutie:

S(n) divizibil cu 3 si s(n) nu e divizibil cu 9.

Daca s(n) ar fi divizibil cu 9 am avea n divizibil cu 9 (F)……………………….2p

Cel mai mare numar de s(n) se obtine pentru numere de forma 999…96, 9 apare de 2011 ori. Vom avea s(n)$\leq 9\cdot 2011+3=18105$……………………………..2p

Cel mai mare s(s(n)) se obtine in schimb pentru numere de forma s(n)=9996$\leq$ 18105. Deci s(s(n))≤ 33……………………………………………………….2p

Vom avea s(s(n))∈{3, 6, 12, 15, 21, 24, 30, 33} Deci s(s(s(n)))∈{3, 6} Ceea ce rezolva problema………………………………………………………………..1p

Problema 3

Fie *p,q,r* numere naturale prime distincte. Determinati valorile lui *p*, *q*, *r* pentru care $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-\frac{1}{pqr}$ este numar natural.

G.M.

Solutie:

Fie p<q<r.

Daca p≥3 vom avea $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{35+15+21}{105}<1 \Rightarrow$ expresie subunitara pozitiva. Deci nu poate fi numar natural.

In concluzie p=2……………………………………………………………..3p

Vom avea $\frac{1}{2}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-\frac{1}{2qr}\in\mathbb{N}$. Daca q≥ 5 vom avea $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\le\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{12}{35}<\frac{1}{2}$

$\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-\frac{1}{2qr}<\frac{1}{2}$ Deci $\frac{1}{2}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}-\frac{1}{2qr}<1 \Rightarrow$ q=3……………………………….2p

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{r}-\frac{1}{6r}\in\mathbb{N}\Rightarrow\frac{5}{6}+\frac{5}{6r}\in\mathbb{N}$$

$\frac{5}{6r}<1\Rightarrow\frac{5}{6r}=\frac{1}{6}\Rightarrow r=5.$

Sol p=2, q=3, r=5……………………………………………………………..2p

Verificare $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{30}=\frac{15+6+10-1}{30}=1$