Problema 1

Fie *(G,·)* un grup cu *2011* elemente. Determinati numarul perechilor $(x,y) \in GxG$ pentru care avem egalitatea $x^3 = y^2$.

Teodor Radu, C.N. Radu Greceanu, Slatina

Solutie:

Definesc f:G→G, f(x)=x^3. Aratam ca f este injectiva si cum G este finita vom avea f bijectiva. f(x_1)=f(x_2)⇒$x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow (x_1^3)^{670} = (x_2^3)^{670} \Rightarrow x_1^{2010} = x_2^{2010}$ si cum $x_1^{2011} = x_2^{2011} \Rightarrow x_1 = x_2$……………………………………………………………………..2p

Definesc g:G→G, g(y)=y^2. Arat ca g este functie injectiva si cum G este finita vom avea g functie bijectiva.

g(y_1)=g(y_2)⇒$y_1^2 = y_2^2 \Rightarrow (y_1^2)^{1005} = (y_2^2)^{1005} \Rightarrow y_1^{2010} = y_2^{2010}$
si cum $y_1^{2011} = y_2^{2011} = e \Rightarrow y_1 = y_2$………………………………………………………2p

f si g bijective⇒(∀) α∈G (∃)! x si (∃)! y ai. x^3=α si y^2=α……………………………..2p

In concluzie x^3=y^2 are exact 2011 solutii…………………………………………………1p

Problema 2

Determinati functiile continue $f:\left[0,\frac{1}{3}\right]\to(0,\infty)$ cu proprietatea ca:

$$27\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)dx+16\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{\sqrt{x+f(x)}}=3$$

Cristinel Mortici, Targoviste

Solutie.

Avem $27\int_0^{\frac{1}{3}}\big(x+f(x)\big)dx+16\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{\sqrt{x+f(x)}}=12$ si luand $g(x)=\sqrt{x+f(x)}$

obtinem $\int_0^{\frac{1}{3}}\left(27g^2(x)+\frac{16}{g(x)}-36\right)dx=0$……………………..3p

sau $\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{(3g(x)+4)(3g(x)-2)^2}{g(x)}dx=0$………………..2p

si rezulta $g(x)=\frac{2}{3}$,deci $f(x)=\frac{4}{9}-x$……………………………………2p

Problema 3

Determinati toate functiile integrabile Riemann $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea ca $\int_a^b f(x)dx = f(b) - f(a), \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

Nitu Cosmin, Bucuresti

Solutie: Avem

$$\int_0^t f(x)dx = f(t) - f(0), \forall t \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

$$\Rightarrow f(t) = \int_a^t f(x)dx + f(0), \forall t \in \mathbb{R} \qquad (2)\text{…./…………………………..1p}$$

Si cum functia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(t) = \int_0^t f(x)dx, \forall t \in \mathbb{R}$ este continua, deducem ca f e continua……………………………………………………………..2p

De aici rezulta ca functia g e derivabila, deci, din (2) rezulta ca si f e derivabila. ……………………………………………………………1p

Derivand relatia (1), obtinem:

$$f(t) = f'(t)$$

Care se scrie echivalent:

$$\frac{e^t f'(t) - \left(e^t\right)' f(t)}{\left(e^t\right)^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(t)}{e^t}\right)' = 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

………………………………………..2p

Asadar $\frac{f(t)}{e^t} = c \Rightarrow f(t) = ce^t, c \in \mathbb{R}$. Intr-adevar, aceste functii verifica egalitatea initiala……………………………………………………………1p

Problema 4

Fie $(G,\cdot)$ un grup cu *2002* elemente, astfel incat functia $f: G\to G$, $f(x)=x^4$ este morfism de grupuri. Sa se arate ca $(G,\cdot)$ este ciclic.

G.M. (selectata de profesor Gh. Duta, C.N. Radu Greceanu, Slatina)

Solutie:

Comform ipotezei avem $f(xy)=f(x)\cdot f(y)$, deci $(xy)^4=x^4y^4$, $(\forall)$ $x,y\in G$……………1p

Avem $xyxyxyxy=(xy)^4x=x^4y^4x$, iar pe de alta parte $xyxyxyxyx=x(yx)^4=xy^4x^4$, deci $xy^4x^4=x^4y^4x$ de unde obtinem $y^4x^3=x^3y^4$, oricare ar fi $x,y\in G$………………………………1p

Prin inductie rezulta ca $x^{3m}y^{4n}=y^{4n}x^{3m}$, $\forall$ $m,n\in\mathbb{N}$ si $x,y\in G$. Atunci $x^{2001}\cdot y^{2004}=y^{2004}\cdot x^{2001}$, de unde $x^{-1}\cdot y^2=y^2\cdot x^{-1}$, folosind $x^{2002}=y^{2002}=e$…………..1p

Prin urmare, $xy^2=y^2x$, $\forall$ $x,y\in G$ si prin inductie, $xy^{2k}=y^{2k}x$, $\forall$ $k\in\mathbb{N}^*$……………..1p

Comform teoremei lui Cauchy, exista elementele $a,b,c,d\in G$ avand ordinele 2, 7, 11, 13, deoarece $2002=2\cdot7\cdot11\cdot13$………………………………………………………..1p

Din $xb^8=b^8x\Rightarrow xb=bx$, din $xc^{12}=c^{12}x\Rightarrow xc=cx$, iar din $xd^{14}=d^{14}x\Rightarrow xd=dx$, $\forall$ $x\in G$. ………………………………………………………………………………………………….1p

Atunci a, b, c, d comuta doua cate doua, de unde optinem ca $ord(abcd)=2002$ si deci $(G,\cdot)$ este grup ciclic…………………………………………………………………1p