Problema 1

Considerăm matricele $a, b \in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^k, B^k \neq \lambda I_2, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \forall\, k \geq 1$. Aratati ca daca există $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A^m = B^n$, atunci $AB = BA$. Reciproca este adevărată?

Cosmin Nitu, Bucuresti

Rezolvare. Demonstrăm mai întâi următoarea lema:

Dacă $C \in M_2(\square)$ atunci pentru orice $n \in \square$ există $x_n, y_n \in \square$ astfel încât:

$$C^n = x_n C + y_n I_2$$

Obs. Conform teoremei Hamilton-Cayley avem $C^2 - trC \cdot C + \det C \cdot I_2 = O_2$......................1p

Pentru n=0, afirmația este trivială ($x_0 = 0,\ x_1 = 1$)

$n \to n+1$

Dacă $C^n = x_n C + y_n I_2$, rezultă

$$C^{n+1} = x_n C^2 + y_n C = x_n trC \cdot C - x_n \det C \cdot I_2 + y_n C = \left(x_n trC + y_n\right) \cdot C - x_n \det C \cdot I_2$$

deci alegem $x_{n+1} = x_n trC + y_n,\ y_{n+1} = -x_n \det C$ şi demonstrația lemei se încheie…………2p

Aplicând lema, rezultă că există $x_n, y_n, z_m, t_m \in \square$ cu proprietatea

$$x_n A + y_n I_2 = z_m B + t_m I_2$$ ………………………………………………………………………………………….1p

de unde obținem că există $\alpha, \beta, \gamma \in \square$ astfel încât

$$\alpha A + \beta B + \gamma I_2 = 0 \quad (*)$$ ……………………………………………………………………………………………..1p

Dacă $\alpha \neq 0$, înmulțind în (*) cu B la stânga, respectiv la dreapta că $AB = BA$. Analog pentru $\beta \neq 0$. Dacă $\alpha = \beta = 0 \Rightarrow \gamma = 0$ şi A,B sunt de forma λI_2, contradicție…………………………1p

Reciproca este falsă. Contraexemplu: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$…………………………………………1p

Problema 2

Fie sirul $(x_n)_{n\in N}$ cu elemente strict positive si marginit care indeplineste relatia $x_{n+3}=\sqrt[3]{3x_n-2}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

Demonstrati ca sirul $(x_n)_{n\in N}$ este convergent.

Cristinel Mortici,Targoviste

Rezolvare.

Fie α=limsupx_n.Fie$x_{k_n}\to\alpha$.Din $x_{k_n}=\sqrt[3]{3x_{kn-3}-2}$, rezulta $x_{kn-3}\to\frac{\alpha^3+2}{3}$,……1p

Deci α≥ $\frac{\alpha^3+2}{3}$ echivalent cu $-\frac{1}{3}(\alpha+2)(\alpha-1)^2\geq 0$ .Rezulta α=1………………..2p

Fie β=liminfx_n.Fie $x_{p_n}\to\beta$.Din $x_{pn+3}=\sqrt[3]{3x_{p_n}-2}$, rezulta $x_{pn+3}\to\sqrt[3]{3\beta-2}$,1p

deci β≤ $\sqrt[3]{3\beta-2}$

Rezulta β=1………………………………………………………………………..2p

Am obtinut limsupx_n = liminfx_n=1 ,deci $(x_n)_{n\in N}$ este convergent…………………1p

Problema 3

Calculati :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\cdot\left[\log_5\left(\sqrt[5^n]{2}+\sqrt[5^n]{3}+\ldots\sqrt[5^n]{5^n+1}\right)\right],$$ unde $[x]$= partea intreaga a numarului real *x*.

Taclit Daniela Nadia, Slatina

Solutie:

Din inegalitatea Bernoulli vom avea

1< $\sqrt[5^n]{a+k} < 1+\frac{k}{5^n}$……………………………………………………………2p

Prin insumare de la k=$\overline{1,5^n}$ obtinem

$5^n < \sum_{k=1}^{5^n}\sqrt[5^n]{1+k} < \frac{3\cdot 5^n+1}{2} < 5^{n+1}$…………………………………………………...1p

Prin logaritmare in baza 5 obtinem n<$\log_5(\sum_{k=1}^{5^n}\sqrt[5^n]{1+k}) < n+1$……………………1p

$[\log_5(\sum_{k=1}^{5^n}\sqrt[5^n]{1+k})] = n$…………………………………………………………1p

Trecerea la limita a sirului $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ si obtinerea (eventual cu criteriul lui D'Alanbert) limitei e……………………………………………………………………………..2p

Problema 4

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(Z)$ o matrice inversabila pentru care inversa $A^{-1} \in M_2(Z)$. Notam $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$,$n\geq 1$.Sa se arate ca $(a_n, b_n)= (a_n, c_n)= (d_n, b_n)= (c_n, d_n)=1$, unde (x,y) reprezinta cel mai mare divisor comun al numerelor x si y.

Vasile Pop, Cluj

Solutie:

Din $A\cdot A^{-1}=I_2 \Rightarrow \det A\cdot \det A^{-1}=1$ si cum $\det A\in\mathbb{Z}$ si $\det A^{-1}\in\mathbb{Z}$ rezulta $\det A=\det A^{-1}\in\{-1, 1\}$……………………..2p

Avem $\det A^n=(\det A)^n \in\{-1, 1\} \Leftrightarrow a_nd_n-b_nc_n\in\{-1, 1\}$………………………………………………………………………………2p

Daca $(a_n,b_n)=\alpha$ atunci α divide $a_nd_n-b_nc_n$, α divide pe 1 sau pe -1 si in concluzie $\alpha=1$……………………………2p

Analog si pentru perechile (a_n,c_n), (b_nd_n) si(c_n, d_n)…………………………………………………………………………………….1p