Problema 1

Sa se determine $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ cu proprietatile:

i) $f(m+n) = f(n) + f(m) + 2mn, \forall\, m, n \in \mathbb{Z}$

ii) $f\big(f(1)\big) - f(1)$ este patrat perfect

Marin Ionescu, Pitesti

Solutie:

Fie g:ℤ→ℤ, g(n)= f(n)-n^2. Din conditia i) ⇒ g(m+n)=g(m)+g(n), ∀ m, n∈ℤ. Se arata ca g(0)=0 si g este functie impara

Se obtine prin inductie matematica ca g(n)=n·g(1), ∀n∈ℕ si tinand cont ca g este impara g(x)=kg(1), ∀K∈ℤ si deci

f(k)-k^2=k(f(1)-1)   (1)

Notam f(1)-1=p∈ℤ, p≥-1 (2)

Luand in (1) k=p, rezulta f(p)=$2p^2$ (3)

Din (2) ⇒ f(1)=p+1 si folosind i) din enunt si (3) avem. f(f(1))=f(p+1)=f(p)+f(1)+2p=$2p^2$+p+1+2p=$2p^2$+3p+1 iar f(f(1))-f(1)=$2p^2$+3p+1-p-1=$2p^2$+2p

Tinand cont de (ii) avem $2p^2$+2p=a^2, a∈ℕ. Evident a este par, deci a=2b, b∈ℕ si avem $2p^2$+2p=$4b^2$, deci p(p+1)=$2b^2$.

Daca p=2k⇒ 2k(2k+1)=$2b^2$, deci k(2k+1)=b^2 si cum (k, k+1)=1, k=u^2, 2k+1=v^2 cu u, v∈ℕ. Se obtine v^2-$2u^2$=1 care este v ecuatii Pele ce are o infinitate de solutii

$[(3+2\sqrt{2)})^n = A_n + B_n\sqrt{2}, \left(3-2\sqrt{2}\right)^n = A_n - B_n\sqrt{2}\ si\ A_n, B_n \in \mathbb{N} cu\ {A_n}^2 - 2B_n^2 = 1]$

Analog pentru p=2k+1 gasim o infinitate de solutii.

Exista o infinitate de functii cu proprietatea din enunt f(x)=k^2+k·p, iar p∈ℤ, p≥-1 este solutie a ecuatiei p(p+1)=2 b^2, b∈ℕ

Problema 2

Daca $x, y, z \in \mathbb{C}$, demonstrati ca:

$$|x| + |y| + |z| \leq |x + y + z| + |x - z| + |x - y| + |y - z|.$$

G.M. (selectata de Gheorghe Duta C.N. Radu Greceanu)

Solutie

$|x + y| + |x - y| \geq |x + y + x - y| = 2|x|$ si

$|x + y| + |x - y| \geq |x + y - x + y| = 2|y|$ ………………………….2p

Din cele doua relatii prin adunare rezulta $|x+y|+|x-y| \geq |x|+|y|$…………..1p

Sumand si egalitatile analoage rezulta:

$|x+y|+|y+z|+|z+x|+|z-y|+|y-z|+|z-x| \geq 2(|x|+|y|+|z|)$………………………..2p

Din inegalitatea lui Hlawka avem:

$|x+y+z|+|x|+|y|+|z| \geq |x + y| + |y + z| + |z + x|$………………………..1p

Si adunand cu inegalitatea precedent obtinem concluzia………………...1p

Problema 3

Fie numerele reale positive $a_1<a_2<...<a_{2011}$. Aratati faptul ca aceste numere reprezinta o progresie geometrica este o conditie si suficienta dar nu si necesara pentru a avea

$$a_1 \cdot a_{2011} = a_2 \cdot a_{2010} = \cdots = a_{1005} \cdot a_{1006}$$

Teodor Radu, C.N. Radu Greceanu, Slatina

Solutie

Daca $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$ este o progresie geometrica de ratie q atunci

$a_1.a_{2011} = a_2 \cdot a_{2010} = \cdots = a_{1005} \cdot a_{1006} = a_1^2 \cdot q^{2010}$……………………..2p

Pentru reciproca folosim urmatorul rezultat.

Daca numerele positive $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$ sunt in progresia geometrica acest lucrueste echivalent cu faptul ca $\lg a_1, \lg a_2, \ldots, \lg a_{2011}$, se afla in progresia aritmetica…..1p

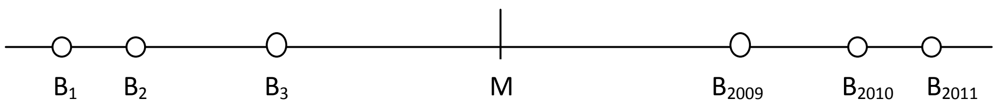
Prin logaritmarea produsului vom avea $\lg a_1 + \lg a_{2011} = \lg a_2 + \lg a_{2010} = \cdots = \lg a_{1005} + \lg a_{1006}$. Notam cu $b_k=\lg a_k$ si B_k va reprezenta imaginea pe axa reala a numerelor b_k……………………………………………………….…………..1p

Vom avea:

$\frac{b_1+b_{2011}}{2} = \frac{b_2+b_{2010}}{2} = \cdots = \frac{b_{1005}+b_{1006}}{2} \Leftrightarrow$

$mijlocul\ (B_1B_{2011}) = mijlocul(B_2B_{2010}) = \cdots = mijlocul(B_{1005}B_{1006})$.

Ceea ce nu implica toate segmentele congruente. Avem congruente de tipul $B_1B_2 \equiv B_{2010}B_{2011}$; $B_2B_3 \equiv B_{2009}B_{2010}$ ……………………………………………2p



Segmentele negongruente implica faptul ca $b_1, b_2, \ldots, b_{2011}$ nu reprezinta obligatoriu o progresie aritmetica $\Rightarrow a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$ nu reprezinta obligatoriu o progresie geometrica……………………………………………………………1p

Problema 4

Pe latura *(BC)* a triunghiului *ABC* consideram punctul *D* astfel incat $\frac{m(\widehat{BAD})}{m(\widehat{BAC})}=\frac{k}{n}, k, n \in \mathbb{N}^*$. Arati ca:

$$\frac{n}{AD}>\frac{n-k}{AB}+\frac{k}{AC}$$

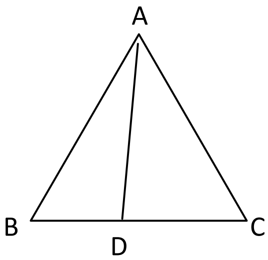
Nitu Cosmin, Bucuresti

Solutie.

Lema: Fie ABC un triunghi si AD, $D\in(BC)$, bisectoarea unghiului A. Atunci are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{AD}>\frac{\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}}{2}$$

Demonstratia lemei.



Din relatiile:

$$A_{ABC}=\frac{AB\cdot AC\sin A}{2}$$

$$A_{ABC}=A_{ABD}+A_{ADC}=\frac{AB\cdot AD\sin\frac{A}{2}}{2}+\frac{AC\cdot AD\sin\frac{A}{2}}{2}$$

Obtinem ca $\frac{1}{AD}=\frac{\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}}{2\cos\frac{A}{2}}$ de unde rezulta inegalitatea ceruta si demonstratia lemei se incheie……2p

Notam $m(\angle BAC)=\alpha$ si pentru un punct oarecare $P\in(BC)$, $m(\angle BAP)=x$. Cu aceste notatii, consideram functia $f:[0,\alpha]\to\mathbb{R}$, $f(x)=AP$. In aceste conditii, inegalitatea se rescrie:

$$f\left(\left(1-\frac{k}{n}\right)\cdot 0+\frac{k}{n}\cdot\alpha\right)>\left(1-\frac{k}{n}\right)f(0)+\frac{k}{n}f(\alpha)$$

……………………………………………………3p

Este suficient sa aratam ca f este strict concava in sensul lui Jensen, ceea ce revine la a arata ca

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)>\frac{f(x)+f(y)}{2},\ \forall x,y\in[0,\alpha]$$

inegalitate ce rezulta din lema, ceea ce incheie demonstratia………………………………………2p