Concursul Interjudețean de Matematică "Bogdan Stan"
Ediția a I-a
Colegiul National "Radu Greceanu", Slatina, OLT
28-29 ianuarie 2011

Subiecte clasa a XII-a

Problema 1.

Se considera mulțimea $G=\left\{A(k)=\begin{pmatrix}2^k & 2^k\\ 2^k & 2^k\end{pmatrix} \middle| k\in Z\right\}$ si pentru fiecare $t\in Z$ notam $H_t=\{A(kt-1)\mid k\in Z\}$. Se admite faptul ca G este un grup in raport cu inmulțirea matricelor.

a) Sa se arate ca $\forall n,p\in Z$, $A(n)\cdot A(p)=A(n+p+1)$

b) Sa se demonstreze ca pentru orice $t\in Z$, H_t este un subgrup al grupului $(G,\cdot)$

c) Sa se determine $a,b\in Z$ astfe incat funcția $f:(G,\cdot)\to(Z,+)$, $f\left(A(k)\right)=ak+b$ sa fie un izomorfism de grupuri.

***

Problema 2.

Fie $(G,\cdot)$ un grup finit de ordin impar si $a,b\in G$. Sa se rezolve sistemul $\begin{cases}ax=b\\ bx=a\end{cases}$

Marian Andronache, Bucuresti, G.M. 1/2009

Problema 3.

Să se determine toate funcțiile integrabile Riemann $f:R\to R$ care au proprietatea că $\int_a^b f(g(x))dx=\int_a^b g(f(x))dx$, $\forall g:R\to R$, continuă, neconstantă, $\forall a,b\in R, a<b$.

Cosmin Nițu, Bucuresti

Problema 4.

Fie $I\subset R$ un interval deschis si functiile $f,g:I\to R$ unde f este o convexa ,iar g este crescatoare.
Sa se arate ca:

a)pentru orice $a<b$ din I derivatele laterale $f_s^{'}, f_d^{'}:I\to R$ ale lui f sunt integrabile pe [a,b] si are loc egalitatea: $f(b)-f(a)=\int_a^b f_s^{'}(t)dt=\int_a^b f_d^{'}(t)dt$.

b)pentru orice a$\in$ I functiile $G:I\to R$ unde $G(x)=\int_a^x g(t)dt$ are derivatele laterale finite in orice punct din I si determinati $G_s^{'},G_d^{'}:I\to R$.

c)functiile $f_s^{'}, f_d^{'}:I\to R$ sunt continue la dreapta pe I utilizand punctele a) si b).

(Se stie ca f are derivate laterale finite in orice punct $x_0\in I$ si
$f_s^{'}(x_1)\le f_d^{'}(x_2)\le \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le f_s^{'}(x_1)\le f_d^{'}(x_2)$ $\forall$ $x_1<x_2$ din I).

Profesor Marin Tolosi C.N. "Radu Greceanu" Slatina