Concursul Interjudețean de Matematică "Bogdan Stan"
Ediția a I-a
Colegiul National "Radu Greceanu", Slatina, OLT
28-29 ianuarie 2011

Barem clasa a IX-a

Problema 1.

Pentru $n \in N^*$, fie S_n mulțimea soluțiilor reale ale ecuației: $n^2x^2 - 2n\{x\} + 1 = 0$,
unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x.

Fie $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} S_k$. Să se determine $n \in N^*$ astfel încât mulțimea $A_n \cap Q$ are 2011 elemente.

Marian Teler, Profesor Costeşti, Județul Argeş

Avem $x^2 = \dfrac{2n\{x\}-1}{n^2} < \dfrac{2n-1}{n^2} \le 1$, $\Rightarrow x \in (-1,1)$, $[x] \in \{-1,0\}$ ……………………………………1p

Distingem cazurile:

1) $[x] = 0$, $x \in [0,1)$, $\{x\} = x$, ecuația devine $n^2x^2 - 2nx + 1 = 0$, $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n \ge 2$, (Pentru $n = 1$ se obține $x_1 = 1 \notin [0,1)$) ……………………………………………………………..1p
2) $[x] = -1$, $x \in [-1,0)$, $\{x\} = x + 1$, ecuația devine $n^2x^2 - 2nx - 2n + 1 = 0$, cu soluția $x_n' = \dfrac{1-\sqrt{2n}}{n}$, $(\forall) n \in N^*$, ……………………………………………………………1p

Rezultă: $S_1 = \{1 - \sqrt{2}\}$, $S_n = \left\{\dfrac{1}{n}, \dfrac{1-\sqrt{2n}}{n}\right\}$, pentru $n \ge 2$

$x_n' \in Q$ dacă şi numai dacă $n = 2p^2$, $p \in N^*$, $x_{2p^2}' = \dfrac{1-2p}{2p^2}$ …………………………………1p

Vom demonstra mai întâi următorul rezultat:

Pentru orice $n \in N^*$, există $p \in N^*$, $k \in \{0,1,2,...,4p+1\}$, unice, astfel încât $n = 2p^2 + k$. Într-adevăr, mulțimile $B_{2p^2} = \{2p^2, 2p^2+1, 2p^2+2, ..., 2p^2+4p+1\}$, $p \in N$, reprezintă o partiție a mulțimii N^* ……………………………………………………………………………..1p

Pentru $n = 2p^2 + k$, $n \ge 2$, $A_n \cap Q = \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, ..., \dfrac{1}{n}\right\} \cup \{x_{2\cdot1^2}', x_{2\cdot2^2}', ..., x_{2p^2}'\}$

Mulțimea $A_n \cap Q$ are $n - 1 + p = 2p^2 + p + k - 1$ elemente. ……………………………………1p

Avem $2p^2 \le n = 2p^2 + k < 2(p+1)^2$ şi $2p^2 + p + k - 1 = 2011$

Rezultă $p = 31$, $k = 59$, $n = 1981$ ………………………………………………………..1p

Concursul Interjudețean de Matematică "Bogdan Stan"
Ediția a I-a
Colegiul National "Radu Greceanu", Slatina, OLT
28-29 ianuarie 2011

Barem clasa a IX-a

Problema 2.
Fie $n \geq 3$ un număr natural ¸si $\alpha \in (0,\ 1)$ un număr real. Să se determine toate

n-uplurile de numere reale $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ cu proprietăaţile:

$x_{k+1} \leq (1 - \alpha)x_k + \alpha x_{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$, *şi* $x_n = x_0$ respectiv $x_{n+1} = x_1$.

Vasile Pop, Cluj

Barem

Notăm cu s suma $s = x_0 + x_1 + \ldots + x_{n-1}$ şi adunăm toate inegalităţile pentru $k = 1, 2, \ldots, n$. Obţinem:

$$s \leq (1 - \alpha)s + \alpha s = s.$$

Dacă una din inegalităţi ar fi strictă atunci obţinem contradicţia $s < s$, astfel că avem egalităţile

$$x_{k+1} = (1 - \alpha)x_k + \alpha x_{k-1}, \quad k = \overline{1, n}$$ …………..2p

sau

$$x_{k+1} - x_k = (-\alpha)(x_k - x_{k-1}), \quad k = \overline{1, n}. \qquad (*)$$ …………...1p

Înmulţind aceste relaţii obţinem:

$$x_{n+1} - x_n = (-\alpha)^{n-1}(x_1 - x_0)$$ …………...2p

şi deoarece $x_{n+1} = x_1$, $x_n = x_0$, rezultă $x_0 = x_1$. Acum din relaţia $(*)$ obţinem succesiv

$$x_1 = x_2,\ x_2 = x_3, \ldots, x_{n-2} = x_{n-1}.$$

În concluzie $x_0 = x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = x \in \mathbb{R}$.

…………2p

Concursul Interjudețean de Matematică "Bogdan Stan"
Ediția a I-a
Colegiul National "Radu Greceanu", Slatina, OLT
28-29 ianuarie 2011

Barem clasa a IX-a

Problema 3.

Daca a,b,c , α , β , $\gamma > 0$ cu proprietatea: $abc > \alpha bc + \beta ac + \gamma ab$.

Sa se arate ca: $a+b+c > \left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}\right)^2$

Tuțescu Lucian C.N . "Frații Buzeşti " Craiova
Chiriță Aurel C.N." Ion Minulescu", Slatina

Barem

Din $abc > \alpha bc + \beta ac + \gamma ab$ prin impartire la abc obtinem $1 > \frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}$ ……………………….1p

Prin inmultire cu a+b+c obtinem

$$a+b+c > \left(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}\right)(a+b+c)$$ ……………………………………………………2p

$$\left(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}\right)(a+b+c) \geq \left(\sqrt{\frac{\alpha}{a}}\cdot\sqrt{a}+\sqrt{\frac{\beta}{b}}\cdot\sqrt{b}+\sqrt{\frac{\gamma}{c}}\cdot\sqrt{c}\right)^2$$ ……………………………………..3p

S-a folosit inegalitatea Cauchy - Buniakowski

$a+b+c > \left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}\right)^2$ …………………………………………………………………...*1p*

Problema 4.

Fie vectorii unitari si coplanari $\vec{v_i}$, $i=\overline{1,7}$.Arătați că există cel putin doi vectori distincți astfel încât $|\vec{v_k}+\vec{v_l}| > \sqrt{3}$.

Profesori: Ion Tecu şi Teodor Radu ,C.N. "Radu Greceanu" ,Slatina

Barem

Reprezentam vectorii $\vec{v_i}, i=\overline{1,7}$ cu originea intr-un punct O. ……………………………………1p

Eventual renotand acesti vectori putem obtine $\overrightarrow{OA_i}=\vec{v_i},$ $i=\overline{1,7}$ astfel incat varfurile A_1 ,A_2,..,A_7 sa le gasim pe cercul de raza 1 si centru O parcurse in aceasta ordine in sens trigonometric. ………1p

Pentru ca $|\vec{v_i}+\overrightarrow{v_{i+1}}| \leq \sqrt{3}$, $i=\overline{1,6}$ trebuie ca $m(A_i\widehat{OA_{i+1}}) \geq 60^\circ$ ………………………………..2p

Rezulta $\sum_{i=1}^{7} m\left(A_i\widehat{OA_{i+1}}\right) \geq 60^\circ\cdot 7 > 360^\circ$ (am considerat $A_8=A_1$) ……………………………1p

Din contradictia obtinuta se deduce faptul ca exista cel putin un $k\in$ {1,2,3,4,5,6} astfel incat $m(A_k\widehat{OA_{k+1}}) < 60^\circ \Leftrightarrow |\vec{v_k}+\overrightarrow{v_{k+1}}| > \sqrt{3}$.(se justifica cu teorema cosinusului) ……………….2p