Concursul Interjudețean de Matematică "Bogdan Stan"
Ediția a I-a
Colegiul National "Radu Greceanu", Slatina, OLT
28-29 ianuarie 2011

Barem clasa a VIII-a

Problema 1.

Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are latura bazei de lungime ***a*** şi înălțimea de lungime ***2a*** ($a \in R_+$).

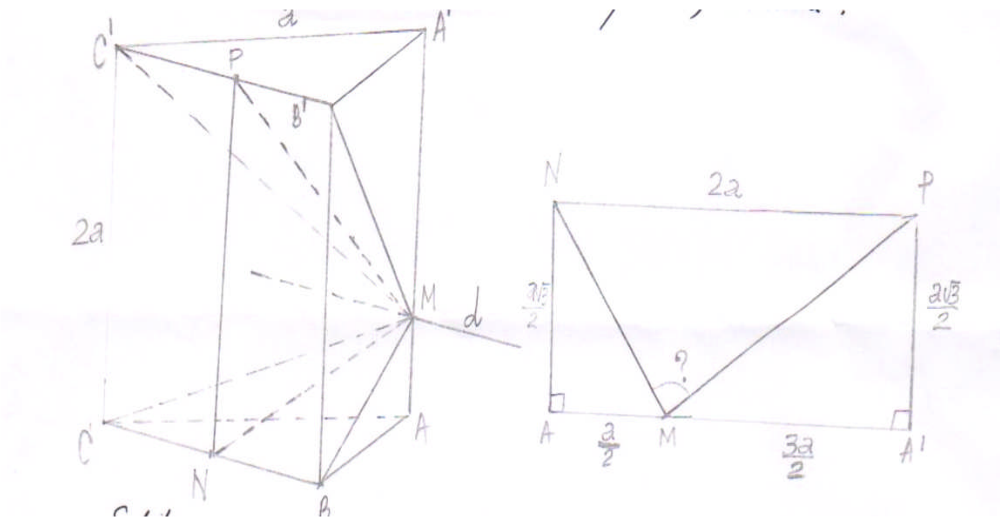
Fie $M \in [AA']$ astfel încât $MA = \frac{a}{2}$.

a) Demonstrați că planele (MBC) şi (MB′C′) sunt perpendiculare;

b) Calculați distanța de la B la planul (MB′C′).

Prof. Niculae Grigorescu, Slatina

Barem



a) Planele (MBC) şi (MB′C′), având punctul M comun, au o dreaptă comună ***d*** ce trece prin M. Cum $BC \parallel B'C'$ şi $BC \subset (MBC)$, $B'C' \subset (MB'C')$, rezultă $d \parallel BC$; $d \parallel B'C'$. …………1p

Fie N şi P mijloacele segmentelor [BC], respectiv [B′C′] .

$MN \perp BC$; $BC \parallel d \Rightarrow MN \perp d$. Analog, $MP \perp d$. Deci unghiul PMN este unghiul plan corespunzător diedrului format de (MBC) şi (MB′C′). ……………………………………1p

$\triangle AMN$ dr $\Rightarrow MN^2 = MA^2 + AN^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$ (1) …………………………………..1p

$\triangle A'MP$ dr $\Rightarrow MP^2 = A'^2M^2 + A'^2P^2 = \frac{9a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}$ (2)……………………………………1p

Din (1), (2) şi $NP^2 = 4a^2$, rezultă că triunghiul MNP este dreptunghic având $m(\widehat{NMP}) = 90^\circ$. Deci $(MBC) \perp (MB'C')$……………………………………………………………………..1p

b) $BC \parallel B'C'$; $B'C' \subset (MB'C') \Rightarrow BC \parallel (MB'C') \Rightarrow d(B, (MB'C')) = d(N, (MB'C')) \Rightarrow d(B, (MB'C')) = MN = a$……………………………………………………………………1p

Am ținut seama că din $(MBC) \perp (MB'C')$, $M \in (MBC)$, $MN \perp d$ şi $d = (MBC) \cap (MB'C')$, rezultă că $NM \perp (MB'C')$, deci $d(N, (MB'C')) = NM$……………………………………1p

Concursul Interjudețean de Matematică "Bogdan Stan"
Ediția a I-a
Colegiul National "Radu Greceanu", Slatina, OLT
28-29 ianuarie 2011

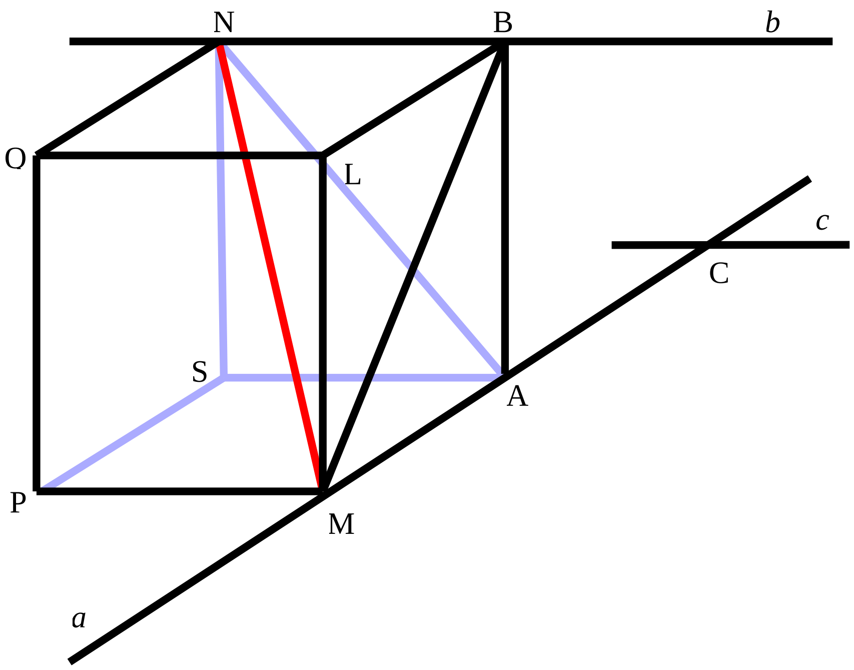
Barem clasa a VIII-a

Observație:
Altă soluție pentru punctul 2):
NM $\perp$ PM (vezi mai sus) şi NM $\perp$ $B'C'$ => NM $\perp$ $(MB'C')$. Cum planul (MBC) conține dr MN $\perp$ $(MB'C')$ => că cele două plane sunt perpendiculare

Problema 2.
Fie dreptele *a*, *b* necoplanare cu $a \perp b$.
a) Arătați că exista o dreapta *AB* cu *A*□*a* şi *B*□*b* astfel încât *AB* $\perp$ *a* şi *AB* $\perp$ *b.*
b) Fie M□a si N□b astfel încât AM=BN. Arătați că $\widehat{AMN} \equiv \widehat{MNB}$

Profesori: Teodor Radu, CN "Radu Greceanu" Slatina
Aurel Chirita, CN" Ion Minulescu" Slatina

Barem



a) Prin *C*□*a* construim dreapta *c* || *b*. Dreptele concurente *a* si *c* determina un plan □. Prin dreapta *a* construim planul β $\perp$ □.

Concursul Interjudețean de Matematică "Bogdan Stan"
Ediția a I-a
Colegiul National "Radu Greceanu", Slatina, OLT
28-29 ianuarie 2011

Barem clasa a VIII-a

β∩b=*B*. ……………………………………………………………………………………………………*1p*

B,a sunt in planul β si ducem *BA* ⊥ *a,* cu *A*□ *a.*

β ⊥ □ si *BA* ⊥ *a*, *a* dreapta comuna => *BA* ⊥ □ => *BA* ⊥ *c*, *c* ||*b* => *AB* ⊥ *b*. ……………………………………………………………………………………………………1p

b) Notam |*MA*|=|*NB*|=*l* si |*AB*|=*h* si construim paralelipipedul dreptunghic *AMPSBLQN* avand ca baze patratele *AMPS* respectiv *BLQN*. ……………………………………………………………*2p*

$|AN|=|BM|=\sqrt{l^2+h^2}$, triunghiurile *NBM* si *MAN* sunt dreptunghice………………………1p

$tg\,\widehat{AMN}=\frac{|AN|}{|AM|}=\frac{\sqrt{l^2+h^2}}{l}$; $tg\,\widehat{BNM}=\frac{|BM|}{|BN|}=\frac{\sqrt{l^2+h^2}}{l}$ => $\widehat{AMN}\equiv\widehat{BNM}$ ………………….2p

Problema 3.

Determinați valoarea maximă a expresiei:

$$\sqrt{9+24x-9x^2}-\sqrt{13-12y+4y^2}-\sqrt{9z^2-24z+16},\quad x,y,z\in R$$

Pentru ce valori ale lui x, y şi z se obține valoarea maximă?

Prof. Doru Anastasiu Popescu, C.N. "Radu Greceanu", Slatina

Soluție

Notație:

$E=\sqrt{9+24x-9x^2}-\sqrt{13-12y+4y^2}-\sqrt{9z^2-24z+16}.$

Pentru a obține o valoare maximă a expresiei E, primul radical trebuie să fie maxim, iar celalte două minime. ……………………………………………………………………………………1p

Pentru a determina valorile lui x,y,z facem prelucrările:

$9+24x-9x^2=25-16+24x-9x^2=25-(4-3x)^2$ (1)

$13-12y+4y^2=4+9-12y+4y^2=4+(3-2y)^2$ (2) 2p

$9z^2-24z+16=(3z-4)^2.$ (3)

Din (1) obținem că $\sqrt{9+24x-9x^2}=\sqrt{25-(4-3x)^2}$ este maxim dacă 4-3x=0, adică dacă x=4/3. …..1p

Din (2) obținem că $\sqrt{13-12y+4y^2}=\sqrt{4+(3-2y)^2}$ este minim dacă 3-2y=0, adică dacă y=3/2. …..1p

Din (2) obținem că $\sqrt{9z^2-24z+16}=\sqrt{(3z-4)^2}$ este minim dacă 3z-4=0, adică dacă z=4/3. ……….1p

Obținem astfel faptul că valoarea maximă a expresiei E este $\sqrt{25}-\sqrt{4}-0=5-2=3$. Această valoare se obține pentru x=4/3, y=3/2, z=4/3. ………………………………………………………………..1p

Concursul Interjudețean de Matematică "Bogdan Stan"
Ediția a I-a
Colegiul National "Radu Greceanu", Slatina, OLT
28-29 ianuarie 2011

Barem clasa a VIII-a

Problema 4.
a) Să se arate că nu există patru numere pozitive x_1, x_2, x_3, x_4 care să verifice inegalitățile:
$4x_1(1-x_2) > 1,\ 4x_2(1-x_3) > 1,\ 4x_3(1-x_4) > 1,\ 4x_4(1-x_1) > 1.$
b) Să se determine numerele a_1, a_2, a_3, a_4 pentru care:
$4a_1(1-a_2) \geq 1,\ 4a_2(1-a_3) \geq 1,\ 4a_3(1-a_4) \geq 1,\ 4a_4(1-a_1) \geq 1.$

Maria Pop,Cluj

a) Dacă $4x_1(1-x_2) > 1$, atunci $x_2 < 1$ şi analog $x_1, x_3, x_4 < 1$. Avem:

$$\sqrt{x_1(1-x_1)} \leq \frac{x_1 + 1 - x_1}{2} = \frac{1}{2},$$

deci $4x_1(1-x_1) \leq 1$ şi analog

$$4x_2(1-x_2) \leq 1, \quad 4x_3(1-x_3) \leq 1, \quad 4x_4(1-x_4) \leq 1,$$ …………2p

cu egalitate numai pentru $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{2}$. …………1p

Înmulţind aceste inegalităţi obţinem:

$$4^4 x_1 x_2 x_3 x_4 (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4) \leq 1.$$

Pe de altă parte înmulţind inegalităţile date obţinem:

$$4^4 x_1 x_2 x_3 x_4 (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4) > 1.$$ ………….2p

b) Din a) avem

$$4^4 a_1 a_2 a_3 a_4 (1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4) \leq 1$$

cu egalitate doar pentru $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{2}$, iar din inegalităţile date avem

$$4^4 a_1 a_2 a_3 a_4 (1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)(1-a_4) \geq 1,$$ …………..1p

deci avem egalitatea şi atunci $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{2}$.

Observaţie. Se poate generaliza pentru n variabile $x_1, x_2, \ldots, x_n$. ……….....1p