Concursul Interjudețean de Matematică "Bogdan Stan"
Ediția a I-a
Colegiul National "Radu Greceanu", Slatina, OLT
28-29 ianuarie 2011

Barem clasa a VII-a

Problema 1.

Fie triunghiul dreptunghic Δ ABC ,m($\angle$ A)=90° ,(BD bisectoarea $\angle$ ABC,D $\in$ (AC),P $\in$ (BC) si {Q}=PD $\cap$ AB.Sa se arate ca [BC] $\equiv$ [BQ]

$\Leftrightarrow P_{\Delta ABD}=P_{\Delta BPD}.(P_{\Delta XYZ}=perimetrul\Delta XYZ)$

Prof. Ion Gusatu, CN "Radu Greceanu" Slatina

Barem

„$\Rightarrow$ ''

Din [BC]=[BQ] si (BD bisectoarea $\angle$ QBC $\Rightarrow$ BD $\perp$ QC.In Δ BQC avem AC $\perp$ QB , BD $\perp$ QC $\Rightarrow$ D ortocentrul Δ BQC $\Rightarrow$ QP $\perp$ BC ; D apartine bisectoarei $\angle$ ABC $\Rightarrow$ DP=DA , PB=AB $\Rightarrow P_{\Delta BAD}=P_{\Delta BDP}$ ……………………………………………………..2p

„$\Leftarrow$''

Din $P_{\Delta BAD}=P_{\Delta BPD}$ demonstram ca DP $\perp$ BC. 1p

Fie D' $\in$ BC astfel incat DD' $\perp$ BC, D' $\in$ (BC).

Daca P $\in$ (D'C) $\Rightarrow$ DP>DD'=DA si BP>BD'=BA $\Rightarrow P_{\Delta BPD}>P_{\Delta BAD}$......................1p

Daca P $\in$ (D'B) $\Rightarrow$ DP>DD'.Fie E $\in$ (DP) astfel incat DE=DD'=DA. Atunci din DE+EP+PB+BD=BD+DA+BA $\Rightarrow$ DA+EP+PB=DA+BD' $\Rightarrow$ EP=BD'-PB $\Rightarrow$ EP=D'P. 2p

Din DD'=DE si D'P=EP $\Rightarrow$ $\angle$ DD'P $\equiv$ $\angle$ DEP(fals).

IN concluzie D'=P $\Rightarrow$ QP $\perp$ BC $\Rightarrow$ D ortocentrul Δ BCQ $\Rightarrow$ BD $\perp$ QC , dar(BD bisectoarea $\angle$ QBC $\Rightarrow$ BC=QB. 1p

Problema 2.

Se considera patratul ABCD si punctele M,N,P astfel incat M $\in$ (BC) , MB=$\frac{1}{3}\cdot BC$,N pe prelungirea laturii(DC), ND=$\frac{1}{3}\cdot DC$, iar P mijlocul laturii (AB). Notam {Q}=DP $\cap$ AC, $\{S\}$=BD $\cap$ QM,{R}=MN $\cap$ BD.Sa se arate ca :

a) Punctele P,S,C sunt coliniare

Barem clasa a VII-a

b) R este centrul cercului circumscris ΔAMN.

Prof. Ion Gusatu, CN "Radu Greceanu" Slatina

Barem

a) [DP], [AO] mediane in Δ ABD$\Rightarrow$Q centrul de greutate al ΔABD$\Rightarrow \frac{AQ}{AO}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{AQ}{AC}=\frac{1}{3}; \frac{BM}{BC}=\frac{1}{3} \Rightarrow QM \parallel AB \Rightarrow QM$ trece prin centrul de greutate al ΔABC; ……..2p

[BO] mediana $\Rightarrow$ {S}=QM$\cap$OB centrul de greutate al Δ ABC $\Rightarrow$ S$\in$ [CP]
([CP] mediana) 2p

b)MS|| DC $\Rightarrow$ $\Delta BMS \sim \Delta BCD \Rightarrow MS=\frac{1}{3}\cdot DC = ND \Rightarrow SMDN$ paralelogram

$\Rightarrow$ R mijlocul lui [MN] ……………………………………………………1p

$(\Delta ABM \equiv \Delta ADN \Rightarrow \angle MAB \equiv \angle NAD \Rightarrow m(\angle MAN)=m(\angle MAD)+m(\angle DAN)=m(\angle MAD)+m(\angle MAB)=$ 90°)………………..1p

ΔMAN dreptunghic$\Rightarrow$R centrul cercului circumscris ΔAMN ……………….1p

Problema 3.

a) Determinați suma tuturor fracțiilor ireductibile şi subunitare cu produsul dintre numărător şi numitor egal cu 360.

b) Se dă un număr natural nenul n. Determinați numărul de fracții, care au produsul dintre numărător şi numitor egal cu n.

Prof. Doru Popescu , CN "Radu Greceanu" Slatina

Soluție

a) Avem 360=$2^3\cdot3^2\cdot5$. ……………………………………………………………………1p

Trebuie să determinăm fracțiile subunitare $\frac{a}{b}$, cu $a\cdot b$=360 şi a şi b prime între ele. Obținem faptul că fracțiile posibile sunt: $\frac{1}{360},\frac{8}{45},\frac{9}{40},\frac{5}{72}$. …………………………………………………………1p

Suma lor este: $\frac{1}{360}+\frac{8}{45}+\frac{9}{40}+\frac{5}{72}=\frac{1^2+8^2+9^2+5^2}{360}=\frac{171}{360}=\frac{19}{40}$. ………………………………1p

b) Se descompune n în factori primi.

$n=p_1^{x_1}\cdot p_2^{x_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{x_k}$.

$p_1, p_2, ..., p_k$ numere prime distincte;

$x_1, x_2, ..., x_k \geq 1$.

Trebuie să determinăm numărul de fracții de forma $\frac{a}{b}$, pentru care $a \cdot b = n$.

Se observă faptul că odată ales *a*, *b* este determinat în mod unic (ca fiind $\frac{n}{a}$). ……………………..1p

Putem alege pe *a* ca fiind orice număr din mulțimea $A = \{ p_1^{y_1} \cdot p_2^{y_2} \cdot ... \cdot p_k^{y_k} \mid 0 \leq y_i \leq x_i \wedge 1 \leq i \leq k\}$.
Numărul de elemente al mulțimii A este egal cu numărul de şiruri (y_1, y_2, ..., y_k) din produsul cartezian:
$P=\{0,1,2,\dots,x_1\}\times\{0,1,2,\dots,x_2\}\times\dots\times\{0,1,2,\dots,x_k\}$.
Numărul de elemente al lui P este $(1+x_1)\cdot(1+x_2)\cdot ... \cdot(1+x_k)$……………………………………………3p

Problema 4.

a) Determinați $a \in N^*$ cu proprietatea $\frac{a^2+2a+15}{a+2} \in N$.

b) Determinați $m, n \in N^*$ cu proprietățile:

$\frac{m^2n+4mn^2+15}{m^2+4mn} \in N$ şi $\frac{8m^3+4m^2n+9}{2m^2+mn} \in N$.

Prof. Doru Popescu , CN "Radu Greceanu" Slatina

Soluție

a) Prelucrăm fracția astfel încât să scoatem întregii din ea. Mai precis:

$\frac{a^2+2a+15}{a+2} = \frac{a(a+2)+15}{a+2} = \frac{a(a+2)}{a+2} + \frac{15}{a+2} = a + \frac{15}{a+2} \in N$. Cum $a \in N^*$, rezultă $\frac{15}{a+2} \in N$.

Astfel $a+2 \mid 15 \Rightarrow a+2 \in \{1, 3, 5, 15\}$ (1). Din $a \in N^*$ şi (1) se obține $a \in \{1, 3, 13\}$. ……………….2p

b) Prelucrăm fracțiile din enunț astfel încît să scoatem întregii din ea. Mai precis :

$$\frac{m^2n+4mn^2+15}{m^2+4mn} = \frac{n(m^2+4mn)+15}{m^2+4mn} = \frac{n(m^2+4mn)}{m^2+4mn} + \frac{15}{m^2+4mn} =$$
$$= n + \frac{15}{m^2+4mn} \in N.$$

Cum $m, n \in N^*$, rezultă $\frac{15}{m^2+4mn} \in N$. Astfel: $m^2+4mn \mid 15 \Rightarrow m^2+4mn \in \{1, 3, 5, 15\}$ (1) ……1p

$$\frac{8m^3+4m^2n+9}{2m^2+mn} = \frac{4m(m^2+mn)+9}{2m^2+mn} = \frac{4m(m^2+mn)}{2m^2+mn} + \frac{9}{2m^2+mn} =$$
$$= 4m + \frac{9}{2m^2+mn} \in N.$$

Cum $m, n \in N^*$, rezultă $\frac{9}{2m^2+mn} \in N$. Astfel:

Concursul Interjudețean de Matematică "Bogdan Stan"
Ediția a I-a
Colegiul National "Radu Greceanu", Slatina, OLT
28-29 ianuarie 2011

Barem clasa a VII-a

$2m^2+mn\,|\,9 \quad \Rightarrow \quad 2m^2+mn \in \{1, 3, 9\}$ (2) ……………………………………….1p

Din $m,n \in N^*$ obținem că $m^2+4mn \geq 5$ si $2m^2+mn \geq 3$ (3) ……………………………………….1p

Din (1) şi (3) avem $m^2+4mn \in \{5, 15\}$ (4)

Din (2) şi (3) avem $2m^2+mn \in \{3, 9\}$ (5) ………………………………………………………….1p

Folosind (5), obținem $4(2m^2+mn)=8m^2+4mn \in \{12, 36\}$ (6).

Folosind (4), (6) şi $8m^2+4mn-(m^2+4mn)=7m^2$ se obține soluție (în mulțimea numerelor naturale), doar pentru valorile 12 şi 5 ($m^2+4mn=5$ şi $8m^2+4mn=12$), adică $7m^2=12-5 \quad \Rightarrow \quad m^2=1 \Rightarrow m=1 \Rightarrow n=1$. ………………………………………………….……..2p