Concursul Interjudețean de Matematică "Bogdan Stan"
Ediția a I-a
Colegiul National "Radu Greceanu", Slatina, OLT
28-29 ianuarie 2011

Barem clasa a VI-a

Problema 1

Fie sirul de numere natural: 1,2,3,4,5,8,7,16,9,….

a) Sa se determine suma primilor 100 de termeni;

b) Sa se arate ca oricare ar fi n par atunci 2+S_n se poate scrie ca suma de doua puteri.

Elev Badea Mihaita ,Caracal

Barem

a)Se observa ca termenii de pe pozitiile impare sunt numerele impare consecutive ,iar cele de pozitiile pare sunt puterile lui 2 in ordine crescatoare: $2^1, 2^2, 2^3, \ldots$.De asemenea se poate observa ca avem 50 de puteri ale lui 2 si primele 50 de numere impare. ………………………………….2p

Notand cu S_{100} suma ceruta avem :

S_{100}=(1+3+5+…+97+99) + ($2^1+2^2+2^3+\cdots 2^{50}$)=100$\cdot$ 25+($2^1+2^1+2^2+2^3+\cdots 2^{50}$)- 2^1= =2500+ ($2^2+2^2+2^3+\cdots 2^{50}$)-2=2500+ ($2^3+2^3+2^4+\cdots 2^{50}$)-2=…=2500 + 2^{51}-2=2498+2^{51}. ……………………………………………………………………………3p

b)

$Suma\ S_{2k}=1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2^1+2^2+\cdots 2^k)=$
$k^2+2^{k+1}-2.\quad Atunci\ avem S_{2k}$
+2 =k^2+2^{k+1},evident suma a doua puteri. …………….2p

Problema 2

Fie $a_1;a_2;\cdots a_n$ masurile a n unghiuri formate in jurul unui punct. Stiind ca $a_1;a_2;\cdots a_n$ sunt numere naturale diferite si $a_2;a_3;\cdots a_n$ sunt multiplii lui a_1. Sa se gaseasca numarul maxim de unghiuri cu proprietatea din enunt si masurile acestora.

Prof. Ion Gușatu , CN "Radu Greceanu", Slatina

Barem

Din enunt => putem cauta Solutia sub forma a_1=1, a_2=2, …, a_k=k,…………………………2p

Tinand cont ca suma masurilor unghiurilor in jurul unui punct este de 360^0 => 1+2+3+…+k$\leq 360^0$ => k(k+1)$\leq 720^0 < 27\cdot 28$

⇨ k≤ 26 ………………………………………………………………………………….2p

O solutie este =1, a_2=2, ..., a_{25}=25,

a_{26}=35…………………………………………………………………………………1p

Pentru k=26 => 1+2+3+….+26=351. Deoarece $a_1;a_2;\cdots a_n$ sunt diferite , nu putem adauga la 26 un alt unghi cu masura diferita de cele anterioare => n=26.....2p

Problema 3.

Stiind ca $\overline{a_1a_2\ldots a_{2011}5}$ -$\overline{5a_1a_2\ldots a_{2011}}$ =4$\overline{a_1a_2\ldots a_{2011}}$ sa se arate ca numarul

Concursul Interjudețean de Matematică "Bogdan Stan"
Ediția a I-a
Colegiul National "Radu Greceanu", Slatina, OLT
28-29 ianuarie 2011

Barem clasa a VI-a

N=1+a_1+$\overline{a_1a_2}$+…+$\overline{a_1a_2\ldots a_{2011}}$ este divizibil cu 100.

Problema selectata din G.M.

Barem

Notam $\overline{a_1a_2\ldots a_{2011}}=x$ => egalitate se scrie $\overline{x5}-\overline{5x}$=4x ………………………………………1p

Folosind scrierea in baza 10 obtinem: $10x+5-5\cdot10^{2011}-x=4x \Leftrightarrow x=999\ldots9$ (de 2011 ori) ……………….3p

N= 1+9+99+ ….+99…9 (de 2011 ori) ………………………………………………………1p

N= $10^2+10^3+\ldots+10^{2011}-2000=100(1+10+100+\ldots+10^{2009}-20) \vdots 100$ …………………………..2p

Problema 4

Fie numarul N=7+$7^2+7^3+7^4+\cdots+7^{2010}+7^{2011}$. Determinati restul impartirii lui N la 19.

Prof. Gh.Duta, CN "Radu Greceanu", Slatina

Barem

Scrie N sub forma N=7+($7^2+7^3+7^4$)+…+($7^{2009}+7^{2010}+7^{2011}$) …………………………….2p

Se obtine N=7 + $19\cdot3(7^2+\cdots+7^{2009})$ ………………………………………………………………..3p

Finalizarea ……………………………………………………………………………………….2p