Concursul Interjudețean de Matematică "Bogdan Stan"
Ediția a I-a
Colegiul National "Radu Greceanu", Slatina, OLT
28-29 ianuarie 2011

Barem clasa a V-a

Problema 1

Fiind date doua numere formate din doua sau mai multe cifre, vom spune ca sunt " prietene " daca suma cifrelor lor este de aceesi paritate (exp: 25 si 126 sunt prietene pentru ca 2+5 =impar si 1+2+6=impar) iar doua multimi formate din numere "prietene " sunt " egal combatante " daca suma cifrelor tuturor numerelor prietene din prima multime este egala cu suma cifrelor tuturor numerelor "prietene" din cea de a doua multime. Fie M multimea formata din toate numerele de doua cifre , mai mici de 50.

a) Dați exemplu de o mulțime cu cinci numere prietene.

b) Gasiti numarul maxim de de numere "prietene" pe care il pot contine doua submultimi ale lui M si in acelasi timp "egal combatante".

Barem :

a) Construire multime ……. 2p.
b) Construieste multimea {10, 12, 14, 16, 21, 23, 25, 27, 2(, 30, 32, 34, 36, 38, 41, 43, 45, 47, 49} ………. 2p.

Construie;te multimea {11, 13, 15, 17, 19, 20, 20, 22, 24, 26, 28, 31, 33, 35, 37, 39, 40, 42, 44, 46, 48} ………. 2p.

Verifivca faptul ca sunt egal combatante, suma cifrelor 140 …….. 1p.

Prof. Țecu Ion, CN "Radu Greceanu" Slatina

Problema 2.

Determinati numerele naturale distincte prime X, Y , Z ce verifica relatia : $2^X + 3^Y + 4^Z \leq 262$.

Prof. Taclit Daniela, CN "Radu Greceanu" Slatina

Barem :

1. $2^x, 3^y, 4^z > 0 \Rightarrow 4^z \leq 262$ ……………………………………………………… 1p

   z=prim => $z \in \{2,3\}$ ………………………………………………………………...1p

   Cazul

   a) $z=2 \Rightarrow 2^x+3^y \leq 246$

      $3^y \leq 246$, y= prim, $y \neq z \Rightarrow y \neq 2$

   a1. y=3 …………………………………………………………………………1p

   $2^x+3^y \leq 246 \Leftrightarrow 2^x \leq 219 \Rightarrow$ x prim , $x \neq y \neq z \Rightarrow x \in \{2,3\}$

   $x=5 \Rightarrow 2^5 \leq 219$, $x=7 \Rightarrow 2^7 \leq 219$ ……………………………………………….1p

   Solutii: $\begin{cases} x=5 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases}$ …………………………………………………….1p

   a2. y=5………………………………………………………………………….1p

   $2^x+3^y \leq 246 \Leftrightarrow 2^x \leq 3 \Rightarrow$ x prim, $x \neq y \neq z \Rightarrow x \in \emptyset$

   Cazul

   b) $z=3 \Rightarrow 2^x+3^y \leq 198$……………………………………………………1p

   Analog cu cazul a) =>

   Solutii: $\begin{cases} x=5 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=7 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$ …………………………………………………….1p

Concursul Interjudețean de Matematică "Bogdan Stan"
Ediția a I-a
Colegiul National "Radu Greceanu", Slatina, OLT
28-29 ianuarie 2011

Barem clasa a V-a

Problema 3

Se considera multimile :$A_n = \{a \in N / 2^n \le a < 2^{n+1}\}$

$B_n = \{b \in N / 3^n \le b < 3^{n+1}\}$,unde $n \in N$

a) Sa se determine $n \in N$ astfel incat $A_n \cap B_n = \phi$

b) Sa se arate ca nu exista $p \in N$ astfel incat card$(A_n \cup B_n) = p^2$,oricare ar fi $n \in N$,unde card(M)=numărul de elemente al multimii M

Prof. Ion Gusatu, CN "Radu Greceanu" Slatina

Barem :

a) Pentru n = 0 $\Rightarrow A_0 = \{1\}, B_o = \{1;2\} \Rightarrow A_0 \cap B_0 = \{1\} \ne \phi$

n = 1 $\Rightarrow A_1 = \{2;3\}, B_1 = \{3;4;5;6;7;8\} \Rightarrow A_1 \cap B_1 = \{3\} \ne \phi$ ….. 1p.

Aratam ca $2^{n+1} < 3^n\ (\forall) n \ge 2$

$n \ge 2 \Rightarrow n = 2 + k, k \in N \Rightarrow 2^{n+1} = 2^{k+3} = 8 \cdot 2^k < 9 \cdot 3^k = 3^{k+2} = 3^n \Rightarrow$ ….1p.

$\Rightarrow a < b (\forall) a \in A_n, b \in B_n, n \ge 2 \Rightarrow A_n \cap B_n = \phi (\forall) n \ge 2$ …..1p.

b) Pentru n=0 $\Rightarrow A_0 \cup B_0 = \{1;2\} \Rightarrow card(A_0 \cup B_0) \ne p^2$

n=1 $\Rightarrow A_1 \cup B_1 = \{2;3;4;5;6;7;8\} \Rightarrow card(A_1 \cup B_1) \ne p^2$ …..1p.

Pentru $n \ge 2 card(A_n \cup B_n) = 2^n + 3^n \cdot 2$ …….. 1p.

Daca n=4k $\Rightarrow u(2^n + 2 \cdot 3^n) = 8 \ne u(p^2)$

n=4k+1 $\Rightarrow u(2^n + 2 \cdot 3^n) = 8 \ne u(p^2)$

n=4k+2 $\Rightarrow u(2^n + 2 \cdot 3^n) = 2 \ne u(p^2)$

n=4k+3 $\Rightarrow u(2^n + 2 \cdot 3^n) = 2 \ne u(p^2)$ …….. 2p.

In concluzie ecuatia nu are solutie.

Problema 4

Sa se determine x si y astfel incat suma S= $\overline{xy1} + \overline{xy2} + \ldots + \overline{xy9}$ sa fie patrat perfect

Prof. Ion Gusatu, CN "Radu Greceanu" Slatina

Barem:

Folosind scrierea in baza zece obtinem S=$3^2.5(20x + 2y + 1)$…………..2p

Cum S este patrat perfect$\Rightarrow$ 20x+2y+1=5k^2 ; x si y cifre$\Rightarrow 21 \le 5k^2 \le 199 \Rightarrow k^2 \in \{9,16,25,36\}$….. 2p.

Concursul Interjudețean de Matematică "Bogdan Stan"
Ediția a I-a
Colegiul National "Radu Greceanu", Slatina, OLT
28-29 ianuarie 2011

Barem clasa a V-a

Dar 20x+2y+1 impar $\Rightarrow k^2$impar $\Rightarrow k^2 \in \{9,25\}$………… 1p.
Pentru $k^2=9 \Rightarrow 20x+2y+1=45 \Leftrightarrow 10x+y=22 \Rightarrow x=2,y=2$…………………………………………......……. 1 p.
Pentru $k^2=25 \Rightarrow 20x+2y+1=125 \Leftrightarrow 10x+y=62 \Rightarrow x=6,y=2$…………………………………….…..…... 1p.