**Concursul Interjudețean de Matematică "Bogdan Stan"**
**Ediția a I-a**
**Colegiul National "Radu Greceanu", Slatina, OLT**
**28-29 ianuarie 2011**

# Barem clasa a XII-a

Barem Clasa a XII-a

**Problema 1.**

Se considera mulțimea $G = \left\{ A(k) = \begin{pmatrix} 2^k & 2^k \\ 2^k & 2^k \end{pmatrix} \middle| k \in Z \right\}$ si pentru fiecare $t \in Z$ notam $H_t = \{A(kt-1) \mid k \in Z\}$. Se admite faptul ca G este un grup in raport cu inmulțirea matricelor.

a) Sa se arate ca $\forall n, p \in Z$, $A(n)\cdot A(p) = A(n+p+1)$
b) Sa se demonstreze ca pentru orice $t \in Z$, $H_t$ este un subgrup al grupului $(G,\cdot)$
c) Sa se determine $a,b \in Z$ astfe incat funcția $f:(G,\cdot) \to (Z,+)$, $f\left(A(k)\right) = ak+b$ sa fie un izomorfism de grupuri.

***

***Solutii:***

a) $A(n)\cdot A(p) = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^p & 2^p \\ 2^p & 2^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+p+1} & 2^{n+p+1} \\ 2^{n+p+1} & 2^{n+p+1} \end{pmatrix} = A(n+p+1)$……………… 1p

b) $A(-1)$ este element neutru in G.........................................................................1p
Simetricul lui $A(n)$ este $A(-n-2) \in G$ ..............................................................1p
Verificam ca $H_t$ este subgrup in G.
1) $A(k_1 t-1)\cdot A(k_2 t-1) = A[(k_1+k_2)t-1] \in H_t$,...............................................................1p
2) $(\forall)A(kt-1) \in H_t$, $A(-kt+1-2) = ((-k)t-1) \in H_t$, deci $(H_t,\circ)$ este subgrup al grupului $(G,\circ)$....................................................................................................................1p

c) $f\left(A(k)\cdot A(l)\right) = f\left(A(k)\right) + f\left(A(l)\right)(\forall)k,l \in Z \Rightarrow a=b=1 \in Z$ .............................1p
Se verifica faptul ca $f: G \to Z,\ f(A(k)) = k+1$. este bijectiva si morfism.............1p

**Problema 2**.

Fie $(G,\cdot)$ un grup finit de ordin impar si $a,b \in G$. Sa se rezolve sistemul $\begin{cases} ax = b \\ bx = a \end{cases}$

Marian Andronache, Bucuresti, G.M. 1/2009

<u>Solutie</u> Din prima ecuatie $x = a^{-1}b$ , iar din a doua $x = b^{-1}a$ ........................................1p
Sistemul are solutie daca si numai daca $a^{-1}b = b^{-1}a \Leftrightarrow \left(a^{-1}b\right)^2 = e \Leftrightarrow ord\left(a^{-1}b\right) \mid 2$..............1p
ord $(a^{-1}b) \mid |G|$ =impar$\Rightarrow$ ord$\left(a^{-1}b\right)$= impar si deci ord$\left(a^{-1}b\right)=1 \Leftrightarrow a^{-1}b = e \Leftrightarrow a=b$ .... 2p
In acest caz rezulta solutia $x = e$ .........................................................................1p

In concluzie, daca a=b sistemul admite unica solutie x=e, iar daca $a \neq b$ sistemul nu admite solutii.........................................................................................................................1p

**Problema 3**.

Să se determine toate funcțiile integrabile Riemann $f : R \to R$ care au proprietatea că $\int_a^b f(g(x))dx = \int_a^b g(f(x))dx$, $\forall g : R \to R$, continuă, neconstantă, $\forall a, b \in R, a < b$.

Cosmin Nițu, Bucuresti

**Barem**.

Fie $\alpha \in R$, arbitrar, şi $a, b \in R$, $a < \alpha < b$ ..........................................................................1p

$f$ este integrabilă Riemann pe [a,b] $\Rightarrow$f marginită pe [a,b] $\Rightarrow \exists c, d \in R$, $c < d$, astfel încât $f([a,b]) \subset [c,d]$.....................................................................................................................1p

Considerăm m= min{a,b,c,d} şi M=max{a,b,c,d}…………………………………………1p

Determinăm $g : R \to R$ continuă, neconstantă, cu $g(x) = \alpha, \forall x \in [m, M]$, de exemplu

$$g(x) = \begin{cases} x - m + \alpha, & x < m \\ \alpha, & x \in [m, M] \\ x - M + \alpha, & x > M \end{cases}$$ ....................................................................…..….......…2p

$\int_a^b f(\alpha)dx = \int_a^b \alpha dx \Rightarrow f(\alpha) = \alpha$ ..........................................................................................1p

Finalizare, $f(\alpha) = \alpha, \forall \alpha \in R$, deci $f$ este funcția identică...............................................1p

**Problema 4.**

Fie $I \subset R$ un interval deschis si functiile $f, g : I \to R$ unde $f$ este o convexa ,iar $g$ este crescatoare. Sa se arate ca:

a)pentru orice $a < b$ din $I$ derivatele laterale $f_s^{'}, f_d^{'} : I \to R$ ale lui $f$ sunt integrabile pe [a,b] si are loc egalitatea: $f(b) - f(a) = \int_a^b f_s^{'}(t)dt = \int_a^b f_d^{'}(t)dt$.

b)pentru orice a$\in$ $I$ functiile $G : I \to R$ unde $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ are derivatele laterale finite in orice punct din $I$ si determinati $G_s^{'}, G_d^{'} : I \to R$.

c)functiile $f_s^{'}, f_d^{'} : I \to R$ sunt continue la dreapta pe $I$ utilizand punctele a) si b).

**Concursul Interjudețean de Matematică "Bogdan Stan"**
**Ediția a I-a**
**Colegiul National "Radu Greceanu", Slatina, OLT**
**28-29 ianuarie 2011**

# Barem clasa a XII-a

( Se stie ca $f$ are derivate laterale finite in orice punct $x_0 \in I$ si

$f_s^{'}(x_1) \le f_d^{'}(x_2) \le \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le f_s^{'}(x_1) \le f_d^{'}(x_2)$ $\forall$ $x_1 < x_2$ din $I$ ).

**Profesor Marin Tolosi C.N. "Radu Greceanu"**

**Barem**

a) $f_s^{'}, f_d^{'} : I \to R$ sunt crescatoare deci sunt integrabile pe $[a,b]$ oricare ar fi $a<b$ din $I$ .Fie $a<b$ din $I$ si $\Delta_n = (x_0^{(n)}, x_1^{(n)},...,x_{k_n}^{(n)}), n \ge 2$ un sir de diviziuni ale lui $[a,b]$ cu $\|\Delta_n\| \to 0$ pentru $x \to \infty$. Pentru diviziune $\Delta_n$ consideram sistemele de puncte intermediare $\xi^{'(n)} = (x_0^{(n)}, x_1^{(n)},...,x_{k_n-1}^{(n)})$ si $\xi^{''(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)},..., x_{k_n}^{(n)})$. In baza precizarii din enunt avem:

$f_d^{'}(x_k^{(n)}) \le \dfrac{f(x_{k+1}^{(n)}) - f(x_k^{(n)})}{x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}} \le f_s^{'}(x_{k+1}^{(n)}), k = \overline{o,k_n - 1}$ de unde prin eliminarea numitorilor si insumare obtinem ca: $\sigma_{\Delta_n}(f, \xi^{'(n)}) \le f(b) - f(a) \le \sigma_{\Delta_n}(f, \xi^{''(n)})$ $\forall n \ge 2$ ...........................1p

Prin trecere la linita pentru $n \to +\infty$ rezulta ca $\int_a^b f_d^{'}(t)dt \le f(b) - f(a) \le \int_a^b f_s^{'}(t)dt$ (1)............2p

$f_s^{'}(t) \le f_d^{'}(t)$ $\forall t \in I$ $\Rightarrow \int_a^b f_s^{'}(t)dt \le \int_a^b f_d^{'}(t)dt \Rightarrow f(b) - f(a) = \int_a^b f_s^{'}(t)dt = \int_a^b f_d^{'}(t)dt$ .........1p

b) $g: I \to R$ crescatoare $\Rightarrow \exists$ limitele laterale finite in oricare punct $x \in I$ ,notate cu $g(x-0), g(x+0)$ ...............................................................................................1p

Vom arata ca $G_d^{'}(x) = g(x+0)$ si $G_s^{'}(x) = g(x-0)$ $\forall$ $x \in I$.

Fie $x_0 \in I$ finit si $x > x_0$.

Avem: $\dfrac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0} - g(x_0+0) = \dfrac{\int_{x_0}^{x} g(t) - g(x_0+0)dt}{x-x_0}$ de unde in baza monotoniei lui g deducem ca $\left|\dfrac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0} - g(x_0+0)\right| \le g(x) - g(x_0+0)$. De aici prin trecere la limita pentru $x \to x_0, x > x_0$ obtinem ca $G_d^{'}(x_0) = g(x_0+0)$. Analog se arata ca $G_s^{'}(x_0) = g(x_0-0)$. Cum $x_0$ este arbitrar din $I$ rezultate ca $G_s^{'}(x) = g(x-0)$ si $G_d^{'}(x) = g(x+0)$ $\forall x \in I$...............2p

c)Din punctul a) rezulta ca pentru $a \in I$ finit avem $f(x) - f(a) = \int_a^x f_s^{'}(t)dt = \int_a^x f_d^{'}(t)dt$ $\forall n \in I$. De aici,tinand seama de punctul b) deducem ca $f_d^{'}(x) = f_d^{'}(x+0)$ si $f_s^{'}(x) = f_s^{'}(x+0)$ $\forall x \in I$..........................................................................................1p