Concursul Interjudețean de Matematică "Bogdan Stan"
Ediția a I-a
Colegiul National "Radu Greceanu", Slatina, OLT
28-29 ianuarie 2011

Barem clasa a XI-a

Problema 1.

Se considera matricile $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ si $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

a) Sa se arate ca ecuatia AX=B are o infinitate de solutii $X \in M_{3,1}$ (C)

b) Sa se determine rangul matricei A^*, adjuncta matricei A

Barem

a) Daca $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(C)$ ecuatia este echivalenta cu sistemul $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + 2y = 1 \\ x + 4y - 3z = 5 \end{cases}$ 2p

Sistemul este compatibil nedeterminat, deoarece rangul matricei sistemului este egal cu 2 ca si rangul matricei extinse 3p

b) $A^* = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & -2 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, $\operatorname{rang}(A^*) = 1$...2p

Problema 2.

Consideram multimea de matrice : $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \Big/ a, b \in R \right\}$. Sa se arate ca pentru fiecare $n \in \mathrm{N}, n \geq 2$ multimea M contine exact doua submultimi H cu n elemente "stabile la inmultire", adica avand proprietatea : $\forall X, Y \in H \Rightarrow XY \in H$.

Marcel Tena , Bucuresti

Barem

$X, Y \in M \Rightarrow XY = O_2 \Leftrightarrow X = O_2 sau Y = O_2$ ……………………………........………..1p

$X, Y \in M \Rightarrow$ XY=YX…………………………………………………………………......1p

Fie acum $H \subseteq M$ o multime stabila la inmultire, cu n elemente.

<u>*Cazul1*</u> : $O_2 \notin H$.

H=$\{X_1, X_2, ..., X_n\}$, pentru fiecare $X \in H$ $\Rightarrow$ H=$\{XX_1, XX_2, ..., XX_n\}$. 1p

$XX_1 \cdot XX_2 \cdot ... \cdot XX_n = X_1 X_2 ... X_n \Rightarrow (X^n - I_2) X_1 X_2 ... X_n = O_2 \Rightarrow X^n = I_2$..................1p

det $X \geq 0 \Rightarrow$ detX=1 $\Rightarrow a = \cos\theta, b = \sin\theta,\ \theta \in [0, 2\pi)$ 1p

$X^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & \sin n\theta \\ -\sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow \theta = \dfrac{2k\pi}{n}$ cu $0 \leq k \leq n-1$

Concursul Interjudețean de Matematică "Bogdan Stan"
Ediția a I-a
Colegiul National "Radu Greceanu", Slatina, OLT
28-29 ianuarie 2011

Barem clasa a XI-a

H=$\left\{\left.\begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & \sin\frac{2k\pi}{n} \\ -\sin\frac{2k\pi}{n} & \cos\frac{2k\pi}{n}\end{pmatrix}\right| 0\le k\le n-1\right\}$ 1p

Cazul2 : $O_2 \in H$. Submultimea $H' = H\setminus\{O_2\}$ verifica primul caz

$H=\{O_2\}\cup H'=\{O_2\}\cup\left\{\left.\begin{pmatrix} \cos\frac{2k\pi}{n} & \sin\frac{2k\pi}{n} \\ -\sin\frac{2k\pi}{n} & \cos\frac{2k\pi}{n}\end{pmatrix}\right| 0\le k\le n-2\right\}$ 1p

In concluzie, pentru $n\ge 2$ dat, exista doua submultimi $H\subseteq M$ care sunt stabile la inmultire si ele sunt date de (1), respectiv (2).

Problema 3.

Fie $(x_n)_n\subset R$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+2011}-x_n)=L\in\overline{R}$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$.

Cosmin Nițu, Bucuresti

Barem

Considerăm subşirurile $(x_{2011n+k})_n, 0\le k\le 2010$. 1p

Pentru k fixat, notam $y_n=x_{2011n+k}$ şi avem $x_{n+2011}-x_n=y_{n+1}-y_n$…..........................…..1p

Aplicand lema Cesaro-Stolz, obținem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{n}=\frac{y_{n+1}-y_n}{n+1-n}=L$ 2p

Deci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{2011n+k}}{2011n+k}=\frac{L}{2011}, \forall 0\le k\le 2010$ 1p

Un subşir arbitrar $(x_{k_n})_n$ al lui $(x_n)_n$, care are limita, va avea o infinitate de termeni in comun cu cel putin unul dintre subsirurile $(x_{2011n+k})_n, 0\le k\le 2010$, deci $x_{k_n}\to\frac{L}{2011}$ ………...1p

Finalizare,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}=\frac{L}{2011}$ 2p

Problema 4.

1.Sa se arate ca:

Concursul Interjudețean de Matematică "Bogdan Stan"
Ediția a I-a
Colegiul National "Radu Greceanu", Slatina, OLT
28-29 ianuarie 2011

Barem clasa a XI-a

a) daca $x_1, x_2, x_3 \in (a,+\infty)$ astfel incat $x_1 < x_2 < x_3$ atunci $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1} < \dfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3 - x_2}$

b) daca $x = a$ este asimptota verticala pentru f atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ si exista $\alpha \in (a,+\infty)$ astfel incat f este strict descrescatoare pe (a,α)

c) daca f admite asimptota orizontala $y = h$ si exista $\beta \in (a,+\infty)$ astfel incat $f(x) \neq h (\forall) x \in (\beta,+\infty)$ atunci f este strict descrescatoare si $f(x) > h (\forall) x \in (a,+\infty)$

d) daca f admite asimptota oblica $y = mx + n$,m<0 si exista $\beta \in (a,+\infty)$ astfel incat $f(x) \neq mx + n (\forall) x \in (\beta,+\infty)$ atunci f este strict descrescatoare si $f(x) > mx + n (\forall) x \in (a,+\infty)$

2. Dati exemple de functii convexe $g, h : (1,+\infty) \to \Re$ astfel incat g sa aiba asimptotele $x = 1, y = 2$ si $g(x) \neq 2 (\forall) x \in (1,+\infty)$ iar h sa admita asimptota $y = -3x + 4$ si $h(x) \neq -3x + 4$ $(\forall) x \in (1,+\infty)$

Marin Tolosi, C.N „Radu Greceanu”, Slatina

Barem
1

a) Daca $x_1, x_2, x_3 \in (a,\infty)$, $x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \exists t \in (0,1)$ astfel incat $t = (1-t)x_1 + tx_2$ si din $f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t) f(x_1) + tf(x_2)$ obtinem relatia ceruta……………………………………………………………………………..1p

b) Daca $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) \neq -\infty \Rightarrow$ daca x=a este asimptota verticala pentru *f*, atunci $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow \exists \alpha \in (a, x_3)$ astfel incat $f(\alpha) > f(x_3)$ ……………………1p

f e descrescatoare pe (a, α)……………….………………………………………………1p

c) ………………………………………………………………………………………2p

d).………………………………………………………………………………………1p

2 De exemplu $g, h : (1,\infty) \to R$, $g(x) = \dfrac{1}{x-1} + 2$, $h(x) = e^{-x} - 3x + 4$ ……………………1p