Grupa 5-6

1. Se dau numerele a=$36^n \cdot 5^{n+1} \cdot 7 - 2^{2n+1} \cdot 3^{2n+1} \cdot 5^n$ si b=$6^n \cdot 5^{n-1} \cdot 19 + 2^{n+1} \cdot 15^n$
   Calculati a: b

Rezolvare:

a=$2^{2n} \cdot 3^{2n} \cdot 5^n \cdot 35 - 2^{2n} \cdot 3^{2n} \cdot 5^n \cdot 6$

a=$2^{2n} \cdot 3^{2n} \cdot 5^n \cdot 29$

b=$2^n \cdot 3^n \cdot 5^{n-1} \cdot 19 + 2^n \cdot 3^n \cdot 5^{n-1} \cdot 10$

b=$2^n \cdot 3^n \cdot 5^{n-1} \cdot 29$

⇒a:b=$2^n \cdot 3^n \cdot 5 = 6^n \cdot 5$

2. Aflati toate numerele de forma xyz stiind ca cifrele x,y,z verificar elatia $x^x = x + 2y + z$.

Rezolvare:

x+2y+z≤9+2·9+9 (x, y, z cifre)

x+2y+z≤36

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\Rightarrow x^x \le 36 \\ x\text{-cifra}\end{array}\right\} \Rightarrow x \le 3 \\ \qquad\qquad\qquad x \ge 1\end{array}\right\} \Rightarrow x \in \{1, 2, 3\}$$

Pentru x=1 ⇒ 2y+z=0 ⇒ y=z=0

Pentru x=2 ⇒ 2y+z=2 ⇒ (y, z) ∈ {(0, 2), (1, 0)}

Pentru x=3 ⇒ 2y+z=24 ⇒ (y, z) ∈ {(8, 8), (9, 6)}

$\overline{xyz}$ ∈ {100, 201, 210, 388, 396}

3. Doua numere se numesc gemene daca sunt prime si diferenta lor este egala cu 2. Determinati numerele **m,n**$\in \boldsymbol{N}$ pentru care $2m^4+3$ si $2n^4+5$ sunt gemene.

Rezolvare:

Fie $2m^4+3$si $2n^4+5$ doua numere gemene.

I.Daca $2m^4$+3>$2n^4+5$ adica

$2m^4+3=2n^4+7 \Rightarrow m^4=n^4+2$. Daca notam cu u(N) ultima cifra a numarului natural N, atunci u$(N^4) \in \{0, 1, 5, 6\}$ (∀)N, deci u$(m^4) \neq$ u(n^4+2), (∀)m, n ∈ N, ceea ce arata ca acest caz este imposibil.

II.Daca $2m^4+3<2n^4+5$ adica $2m^4+3=2n^4+3$, rezulta m=n. Avem u$(2m^4) \in \{0, 2\}$.

Daca u$(2m^4)$=0 atunci u$(2m^4+5)$ = 5 si deoarece $2m^4+5$ este prim, trebuie ca $2m^4+5=5$, adica m=0. Atunci $2m^4+3=3$ si $2m^4+5$ = 5 sunt numere prime gemene.

Daca u$(2m^4)$ = 2 atunci u$(2m^4+3)$ = 5 de unde $2m^4+3$ = 5 adica m=2 se obtine $2m^4+5$ = 7, deci perechea de numere gemene (5, 7).

Solutie: (3, 5), (5, 7).

4. Fie multimea A={1,2,. . ,2016}. Se considera o submultime X cu 1009 elemente ale multimii A.

   Aratatica:

   a) Multimea X contine cel putin doua numere a caror suma este egala cu 2017.
   b) Multimea X contine cel putin doua numele a caror diferenta este egala cu 1008.

Rezolvare:

a) Grupam elementele multimii A in perechi cu suma 2017: {1, 2016}; {2, 2015}; {3, 2014}; … {1008, 1009} in numar de 1008. Din principiul cutiei oricum am alege 1009 elemente cel putin doua vor fi in aceeasi pereche, deci vor avea suma 2017.

b) Grupam elementele multimii A in perechi cu diferenta 1008: {1009, 1}; {1010, 2}; … {2016, 1008} in numar de 1008. Din principiul cutiei oricum am alege 1009 elemente cel putin doua vor fi in aceeasi pereche, deci vor avea diferenta 1008.

5. Patru oameni A,B,Csi D se afla la intrarea intr-un tunel intunecos. Lui A ii trebuie 8 minute casa il traverseze, lui B ii trebuie 4 minute, C are nevoie de 2 minute, iar D de un sigur minut. Ei au la dispozitie doar o torta cu ajutorul careia pot traversa tunelul. In plus, cel mult doi oameni pot intra simultan in tunel folosind torta care arde complet in 15 minute. Cum vor proceda astfel incat sa traverseze toti tulelul?

Rezolvare:

C si D → 2 min.

1 min. ← D

A si B → 8 min.

2 min. ← C

Csi D → 2 min.

TOTAL: $2 + 1 + 8 + 2 + 2 = 15$ min.