Grupa medie (clasele VII-VIII) Matematică

Problema 1 (9 puncte)

Determinati numarul drumurilor de sus in jos pe care se poate citi BLAISE PASCAL (In fiecare pozitie din tabolu se poate ajunge doar din cele doua pozitii (daca exista) aflate pe randul superior, la stanga si la dreapta pozitiei curente).

```
B B B B B B
 L L L L L
  A A A A
   I I I
    S S
     E
    P P
   A A A
  S S S S
 C C C C C
A A A A A A
L L L L L L L
```

<u>Solutie:</u> Atasam fiecarei litere (element al tabloului) un numar egal cu numarul drumurilor care ajung la ea, plecand de sus: ……..3p

```
1 1 1 1 1 1
2 2 2 2 2
4 4 4 4
8 8 8
16 16
32
32 32
32 64 32
32 96 96 32
32 128 192 128 32
32 160 320 320 160 32
32 192 480 640 480 192 32
```

……….4p(construcția tabelului)

Pentru fiecare pozitie din tablou, numarul corespunzator reprezinta suma celor doua numere aflate deasupra lui (la stanga si la dreapta, daca exista), deoarece numai din aceste pozitii se poate ajunge in pozitia curenta.

Numarul total de drumuri va fi

32+192+480+640+480+192+32=2048. ………2p(finalizare)

De remarcat ca problema are o rezolvare algoritmica, putand fi implementata ca o problema simpla de programare dinamica.

Problema 2 (9 puncte)

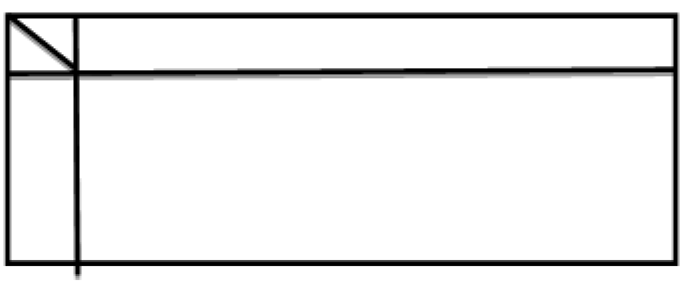
Fie un dreptunghi cu lungimea de 150 cm si latimea de 30 cm. Consideram in interiorul dreptunghiului 501 puncte. Demonstrati ca exista cel putin 2 puncte aflate la o distanta de cel mult $3\sqrt{2}$ cm.

Solutie:

Impartim latimea in 10 segmente congruente(acestea vor avea lungimea de 3 cm) si lungimea in 50 de segmente congruente(acestea vor avea lungimea de 3 cm). Trasand paralele la laturile dreptunghiului prin punctele de pe latime si lungime, vom obtine 10*50=500 patrate cu latura de 3 cm, in interiorul dreptunghiului. ………….. 5 pct.

Folosind principiul cutiei(avem 501 puncte) obtinem ca intr-un patrat se vor afla cel putin 2 puncte dintre cele 501 considerate initial. ……… 3 pct.

Distanta maxima intre 2 puncte aflate intr-un patrat se obtine atunci cand punctele sunt varfurile unei diagonale. Diagonala unui patrat cu latura de 3 cm are lungimea egala cu $3\sqrt{2}$ cm, de unde rezulta concluzia. ……… 1 pct.



Problema 3 (9 puncte)

Pe o tabla se afla 2014 numere naturale distincte. La fiecare pas, alegem 4 numere, le stergem, si scriem pe tabla suma lor. Este posibil ca la un moment dat pe tabla sa se afle exact 1526 numere?

Solutie:

Observam ca 2014=3k+1. Printr-o operatie scadem 4, avem 3k-3, si adunam 1, pe tabla raman 3(k-1)+1 numere. Asadar pe tabla vom avea un numar de forma M3+1, indiferent de numarul de operatii efectuate. 1526=1524+2. 1524 este divizibil cu 3, deci 1526 este de forma M3+2. Asadar raspunsul este nu. Nu este posibil sa se afle pe tabla exact 1526 numere.

Problema 4 (9 puncte)

Rezolvati ecuatia: $x^3 - y^3 = xy + 41$, in multimea numerelor naturale.

Solutie:

xy + 41>0 deci $x^3 > y^3$ deci x > y. Asadar x poate fi scris x = y + d cu d ≥ 1. … 2 pct.

Ecuatia devine $(y+d)^3 - y^3 = (y+d)y + 41$. Obtinem

$3y^2d + 3yd^2 + d^3 == y^2 + dy + 41$. Deci $y^2(3d-1) + (3d-1)dy + d^3 = 41$. … 2pct.

Observam acum ca d ≤ 3. Pentru d=3 si d=2, dupa ce se fac calculele se observa ca se va ajunge la o ecuatie in care y nu mai poate fi natural, contradictie. Pentru d=1 ajungem la ecuatia: $y^2 + y = 20$ care are solutia unica y=4. Ramane x=5. … 5pct.

Problema 5 (9 puncte)

Fie a,b,c,d > 0, a+b+c+d=1. Aratati ca $(a+\frac{1}{a})^2 + (b+\frac{1}{b})^2 + (c+\frac{1}{c})^2 + (d+\frac{1}{d})^2 \geq \frac{289}{4}$.

Solutie:

Vom folosi inegalitatea lui Bergstrom(se poate demonstra folosind CBS pentru numerele a_1, a_2, a_3, a_4 si b_1, b_2, b_3, b_4, $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) \geq (a_1 b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4)^2$ si alegand $a_1=a_2=a_3=a_4=1$).

Obtinem folosind inegalitatea lui Bergstrom

$$(a+\frac{1}{a})^2 + (b+\frac{1}{b})^2 + (c+\frac{1}{c})^2 + (d+\frac{1}{d})^2 \geq \frac{\left(a+b+c+d+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^2}{4} \geq \frac{\left(1+\frac{16}{a+b+c+d}\right)^2}{4} = \frac{289}{4}.$$