INFO-OLT

Barem grupa avansati

Solutia comisiei	**Punctaj**
1. Dacă numerele reale a,b,c sunt toate trei mai mari strict decât 0 si mai mici strict decât 1, să se arate că măcar unul dintre numerele a(1-b), b(1-c), c(1-a) nu este strict mai mare decât $\frac{1}{4}$.	1p oficiu
<u>*Solutia 1*</u>: 0<a<1 => 1-a>0.	1
Din inegalitatea mediilor, a(1-a)≤$\left(\frac{a+1-a}{2}\right)^2$ => a(1-a)≤$\frac{1}{4}$	3
Analog b(1-b)≤$\frac{1}{4}$, c(1-c)≤$\frac{1}{4}$ => abc(1-a)(1-b)(1-c)≤$\frac{1}{4^3}$.	3
Daca a(1-b)>$\frac{1}{4}$, b(1-c)>$\frac{1}{4}$ si c(1-a)>$\frac{1}{4}$ atunci am obtine abc(1-a)(1-b)(1-c)> $\frac{1}{4^3}$, contradictie.	2
<u>*Solutia 2*</u>: Presupunem prin reducere la absurd ca toate cele trei numere a(1-b), b(1-c) si c(1-a) sunt strict mai mari decat $\frac{1}{4}$.	1p oficiu
Din inegalitatea mediilor, $\sqrt{a(1-b)} \le \frac{a+1-b}{2}$.	3
=> $\frac{(a+1-b)^2}{4}$ ≥ a(1-b) > $\frac{1}{4}$ => $(a+1-b)^2$>1 => |a+1-b|>1 => a+1-b>1 sau a+1-b< -1.	3
Din a+1-b< -1 obtinem b>a+2, imposibil deoarece a+2>2 (a>0) si b<1.	1
Deci, a+1-b>1, de unde a>b.	
Analog b>c si c>a =>a>b>c>a (imposibil).	1
=> Presupunerea este falsa. =>Macar unul din numerele a(1-b), b(1-c), c(1-a) nu este strict mai mare decât $\frac{1}{4}$. (G. B.)	1
2. Arătați că nu există numere reale x, astfel încât: $\left\|x-\sqrt{3}\right\|+\left\|x-\frac{3}{2}\right\|=x-2$.	1p oficiu
<u>*Soluție*</u>: Vom desface cele două module pe cazuri.	
Cazul I: Daca x∈(-∞,$\frac{3}{2}$] =>x≤$\frac{3}{2}$<$\sqrt{3}$.	1
$\left\|x-\sqrt{3}\right\|$=$\sqrt{3}$-x.	1
$\left\|x-\frac{3}{2}\right\|$=$\frac{3}{2}$ - x.	

=> $\sqrt{3}$-x+ $\frac{3}{2}$ -x=x-2. =>x=$\frac{2\sqrt{3}+7}{6}$>$\frac{3}{2}$. =>x∈ ∅.	1
Cazul II: Daca x∈($\frac{3}{2}$,$\sqrt{3}$] =>$\frac{3}{2}$<x≤$\sqrt{3}$.	1
$\left\|x-\sqrt{3}\right\|$=$\sqrt{3}$-x.	1
$\left\|x-\frac{3}{2}\right\|$=x - $\frac{3}{2}$.	
=> $\sqrt{3}$-x+ x- $\frac{3}{2}$ =x-2. =>x=$\frac{2\sqrt{3}+1}{2}$>$\sqrt{3}$. =>x∈ ∅.	1
Cazul III: Daca x∈($\sqrt{3}$,+∞) =>x>$\sqrt{3}$>$\frac{3}{2}$.	1
$\left\|x-\sqrt{3}\right\|$=x-$\sqrt{3}$.	1
$\left\|x-\frac{3}{2}\right\|$=x - $\frac{3}{2}$.	
=> x-$\sqrt{3}$+ x- $\frac{3}{2}$ =x-2. =>x=$\sqrt{3}$ - $\frac{1}{2}$<$\sqrt{3}$. =>x∈ ∅.	1
Deci, nu există x∈R astfel încât $\left\|x-\sqrt{3}\right\|+\left\|x-\frac{3}{2}\right\|=x-2$.	
(G. B.)	
3. Pentru un numar natural n, prin *lungime* intelegem numarul de factori din scriere a lui n ca produs de numere prime. De exemplu, numarul 90=2·3·3·5 are lungimea 4, iar numarul 70=2·5·7 are lungimea 3. Cate numere cel mult egale cu 100 au lungimea 3?	1p oficiu
Solutie: Gandim numerele de lungime 3 ca i·j·k, cu 2≤i≤j≤k, i,j,k numere prime. Procedam dupa urmatorul algoritm:	1
pentru i∈{2,3,5,7,11,13,17,19,23} *pentru j≥i, j∈{2,3,5,7,11,13,17,19,23}* *pentru k≥j, k∈{2,3,5,7,11,13,17,19,23}* *daca i·j·k≤100 scrie i·j·k;*	
Mai exact, numaram toate combinatiile de trei numere prime i,j,k pentru care 2≤i≤j≤k si i·j·k≤100. Ne-am oprit la 23 pentru fiecare dintre numerele i, j si k deoarece 2·2·23≤100, iar 2·2·29>100 si acesta este cel mai nefericit caz, intrucat i·j·k≥2·2·k.	3
Astfel, vom alege produsele: 2·2·2, 2·2·3, 2·2·5, 2·2·7, 2·2·11, 2·2·13, 2·2·17, 2·2·19, 2·2·23, 2·3·3, 2·3·5, 2·3·7, 2·3·11, 2·3·13, 2·5·5, 2·5·7, 2·7·7, 3·3·3, 3·3·5, 3·3·7, 3·3·11, 3·5·5.	3
Numerele cu i≥5 vor fi cu siguranta mai mari decat 100 deoarece cel mai mic astfel de numar este 5·5·5=125>100.	1
In total, obtinem 22 de numere de lungime 3, cel mult egale cu 100.	1
(G. B.)	
4. Fie $a_n = n^7 - n$, pentru orice n din N*. Sa se afle cel mai mare divizor comun al numerelor	1p

$a_1,a_2,\dots,a_n$, $n\geq 3$. *<u>Solutie:</u>* Calculand a_1, a_2 si a_3 obtinem: $a_1=1^7-1=0$ $a_2=2^7-2=126=2*3^2*7$ $a_3=3^7-3=2184=2^3*3*7*13$ Observam ca cel mai mare divizor comun al acestora este 42. Deci , cel mai mare divizor comun al numerelor $a_1,a_2,\dots,a_n$, $n\geq 3$, este un divizor al lui 42. Descompunem numarul $n^7-n=n(n^6-1)=n(n^3-1)(n^3+1)=n(n-1)(n^2+n+1)(n+1)(n^2-n+1)$. Evident n^7-n se divide cu 2 si cu 3(dintre 3 numere consecutive,n-1,n,n+1, cu siguranta gasim unul par si unul divizibil cu 3). Analizand fiecare caz dupa restul impartirii la 7 al lui n (0,1,2,3,4,5,6),vom gasi cu siguranta un factor din descompunerea lui n^7-n care sa fie divizibil cu 7. Deci, pentru orice $n\geq 3$, numarul n^7-n se divide cu 42. In concluzie, cel mai mare divizor comun al numerelor $a_1,a_2,\dots,a_n$, $n\geq 3$ este 42. (S.V.)	oficiu 1 2 2 1 2 1
5. Bisectoarele AD,BE si CF ale triunghiului ABC se intersecteaza in punctul O. Sa se demonstreze ca daca triunghiurile BOF si BOD au arii egale, atunci triunghiul ABC este isoscel. *<u>Solutie:</u>* $S_{BOF=}S_{BOD}$, deci(FB*BO*sin(FBO))/2=(OB*BD*sin(OBD))/2 . Cum BO este bisectoare rezulta ca FB=BD. Obtinem ca triunghiurile OBF si OBD sunt congruente deci FO=OD si unghiurile FOD si BOD sunt congruente, la fel si unghiurile AOE si EOC. Unghiul AFO este congruent cu ODC. Deci triunghiurile AOF si DOC sunt congruente, si obtinem AO=OC. De aici rezulta ca triunghiurile AOE si EOC sunt congruente. Deci AE=EC. Din th. bisectoarei avem$\frac{AB}{BC}=\frac{AE}{EC}$. Deci AB=BC si triunghiul este isoscel. (D.R.)	1p oficiu 2 3 4
Subiectele au fost propuse de: **elev Gabriel Boroghină, clasa a X-a, C. N. "Radu Greceanu", Slatina.** (G. B.) **elev Dan Rădulescu, clasa a X-a, C. N. "Radu Greceanu", Slatina.** (D.R.) **elev Sorin Vladu, clasa a XI-a, C. N. "Radu Greceanu", Slatina.** (S.V.)	