Grupa medie (clasele VII-VIII) Matematică

Problema 1

a) Doar se aduce la acelasi numitor, se inmulteste cu ab si inegalitatea devine echivalenta cu (a-b) la patrat mai mare decat 0. Evident Adevarat.

b) 1 se poate scrie ca $x_1 \bullet x_2 \bullet \dots \bullet x_{10}$. Se da x_1 factor comun in prima paranteza, x_2 in a a 2-a paranteza, si tot asa, in ultima paranteza dam x_{10} factor comun.

Obtinem $x_1x_2x_3....x_{10}(x_1+8+1/x_1)\ (x_2+8+1/x_2)\ (x_3+8+1/x_3)......\ (x_{10}+8+1/x_{10}) \geq 10^{10}$

Echivalent cu a demonstra fiecare paranteza ≥10. Folosind punctual a) rezulta imediat concluzia.

Problema 2

Avem $n^2+6n+9< n^2+8n< n^2+8n+16$ pentru 2n>9, adica n>4 (deoarece n este natural)

Cum pentru n>4 numarul nostru n^2+8n este incadrat intre doua patrate perfecte consecutive, acesta nu poate fi patrat perfect. Pentru ca radicalul sa apartina naturale trebuie sa avem n≤4.

Solutiile care verifica sunt n=0 si n=1.

Problema 3

Construim BE $\perp$ AD (E se afla pe AD) si BE ∩ AC={F} . Observam ca triunghiul ABF este isoscel. In triunghiul dreptunghic AFE obtinem AE=c $\cos\frac{A}{2}$. Aplicand Th. Menelaus in triunghiul ADC cu transversala B-E-F gasim DE= $\frac{c(b-c)}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ astfel:

Cu teorema bisectoarei in triunghiul ABC gasim BD= $\frac{ac}{b+c}$. => $\frac{CB}{BD}=\frac{b+c}{c}$. Cum AF=c => CF=b-c. => $\frac{AF}{FC}=\frac{c}{b-c}$. Din Menelaus avem:

$\frac{AF}{FC}\cdot\frac{CB}{BD}\cdot\frac{DE}{AE}=1$. Cum AE=c $\cos\frac{A}{2}$ => DE= $\frac{c(b-c)}{b+c}\cos\frac{A}{2}$. De unde rezulta concluzia.

Problema 4

$12x^2-x\sqrt{2160}+61=\left(2x\sqrt{3}-3\sqrt{5}\right)^2+16$;

$9y^2-30y+50=(3y-5)^2+25$;

$\mathbf{8z^2 - 4z\sqrt{6} + 12 = \left(2z\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2}$ +9;

Deci expresia din enunt E ≥ 4+5+3 = 12. (deoarece $\left(2x\sqrt{3} - 3\sqrt{5}\right)^2 \geq 0$; $(3y-5)^2 \geq 0$ si $\left(2z\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)^2 \geq 0$) . Cum E ≤ 12 rezulta ca avem egalitate in cele trei inegalitati scrise mai sus. Obtinem: $x = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$; $y = \frac{5}{3}$ si $z = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Problema 5

Patratele perfecte impare dau la impartirea cu 4 restul 1. Suma lor va avea restul de forma 4p +3, iar numerele de aceasta forma nu sunt patrat eperfecte.
Putem scrie;
$S=(4a_1+1) +(4a_2+1)+ (4a_3+1)\ldots..+ (4a_{2015}+1)=M_4 +2015=M_4 +3$ numar ce nu poate fi patrat perfect.